

Р. П. Овчинникова, А. В. Корельская,

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ САНГАКУ ПО ТЕМЕ «ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ»

Аннотация

В статье рассматривается современный подход к обучению планиметрии на основе японской математики васан и использования динамических моделей, разработанных с помощью интерактивных геометрических сред. Представлена динамическая модель одной из задач сангаку, решение которой можно включить в систему задач по теме «Подобие треугольников».

Ключевые слова: школьный курс планиметрии, подобие треугольников, задача сангаку, динамическая модель, интерактивная геометрическая среда, GeoGebra.

Сангаку — это цветные деревянные таблички с изображением математических задач, относящиеся к национальной японской математической школе *васан* периода Эдо (XVII—XIX века), когда люди различных сословий изучали математику самостоятельно и результаты своих трудов вывешивали в храмах, приглашая других к соревнованию [3].

Идея включения задач сангаку в обучение геометрии не нова. Впервые их дидактический потенциал был замечен в Болгарии, а впоследствии в Канаде, Испании и в самой Японии [5]. К задачам сангаку как виду *математического творчества* проявляют интерес многие в России. Например, предложение школьникам создавать деревянные таблички с основными теоремами курса геометрии и вывешивать их в классе принадлежит Д. Э. Шнолю, возрождение математических табличек с задачами для подарков коллегам — С. А. Беляеву [2], построение теории решения задач сангаку — А. И. Щетникову [7]. Решения большинства задач сангаку «практически невероятны, и современные геометры неизменно штурмуют их с помощью продвинутых методов, включая методы вычисления и аффинные преобразования» [4], но имеются и весьма простые задачи, которые могут быть решены школьниками.

Новым витком в развитии обучения геометрии на основе японской математики васан стало использо-

вание *динамических моделей*, разработанных с помощью интерактивных геометрических сред (ИГС), сочетающих в себе конструирование, динамическое варьирование и эксперимент и поддерживающих все аспекты современного школьного математического образования — информирование, выполнение практических заданий и автоматическую проверку их выполнения.

Под *системой динамических моделей* А. Н. Бакуров понимает некоторую совокупность динамических моделей, находящихся во взаимосвязи друг с другом и выполняющих определенные дидактические функции в процессе обучения геометрии [1]. Единую систему составляют динамические модели, служащие для:

- формирования основных понятий;
- формирования и доказательства теорем и свойств;
- использования при решении задач курса геометрии.

В проведенном исследовании А. Н. Бакуров доказал, что «за счет использования динамических компьютерных моделей мы оказываем влияние на деятельность учителя и ученика, и... на результат, т. е. повышаем эффективность всего процесса» [1], и выявил следующие **дидактические функции динамических компьютерных моделей:**

Контактная информация

Овчинникова Раиса Петровна, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; *адрес:* 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *телефон:* (8182) 21-61-07; *e-mail:* r.ovchinnikova@narfu.ru

Корельская Александра Викторовна, студентка Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; *адрес:* 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *телефон:* (8182) 21-61-07; *e-mail:* true23-3@yandex.ru

R. P. Ovchinnikova, A. V. Korelskaya,

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk

THE DYNAMIC MODEL OF SANGAKU PROBLEM ON THE THEME "THE SIMILARITY OF TRIANGLES"

Abstract

The article describes the modern approach to training in plane geometry based on Japanese mathematics Bashan and the use of dynamic models, which were developed using dynamic geometry systems. The dynamic model by one of the problems sangaku is represented, the solution of which can be included on the theme "The similarity of triangles".

Keywords: school course of plane geometry, similarity of triangles, sangaku problem, dynamic model, dynamic geometry system, GeoGebra.

- предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения математическими фактами;
- отработка в интерактивном режиме элементарных базовых умений;
- усиление значимости исследовательской деятельности учащихся;
- увеличение собственной практической деятельности ученика;
- возможность увеличения объема предъявляемой для изучения информации за счет интенсификации процесса обучения;
- увеличение доли содержательной работы ученика за счет снятия проблем технического характера.

Нами была разработана интерактивная динамическая модель, в основе которой лежит задача сангаку, доступная восьмиклассникам. Данная модель выполнена в ИГС GeoGebra и предназначена для использования при обучении решению задач по теме «Подобие треугольников». Модель позволяет организовать деятельность учащихся по поиску соотношений между геометрическими величинами путем эксперимента, решения задач на доказательство, решения задач на построение с использованием ИГС.

Модель состоит из пяти динамических листов (слайдов).

Каждый слайд разделен на две области (два полотна), несущих определенную часть информации.

Правая область служит для навигации по слайдам, содержит задания для учащихся и краткие указания для работы. Навигация по слайдам осуществляется посредством ползунка «Переход», указания для работы отображаются путем установки галочки в поле управления параметром с двумя состояниями.

Левая (основная) область слайда предназначена для отображения динамических чертежей к условиям задач, этапов и указаний хода решения в случае возникновения у учащихся затруднений. Отображения этапов решения и указаний заданы

при помощи логических условий, что обеспечивает необходимую очередность появления объектов друг за другом и высокую эффективность работы с большим числом объектов. Тексты и элементы навигации полотен закреплены, изменению может подвергаться только чертеж.

Слайд 1 посвящен краткой исторической справке, которая знакомит учащихся с термином «сангаку» и его происхождением (рис. 1). Также на данном слайде изображена реально существующая досочка с задачами сангаку (со ссылкой на источник картинки) и выполнен динамический чертеж к задаче, с которой впоследствии учащиеся будут работать. Изменять параметры чертежа можно путем передвижения точек A и B , которые обозначены значком в виде стрелки. Динамический чертеж дается в готовом виде, так как у учащихся еще не хватает знаний для его выполнения.

Основная часть **слайда 2** изначально содержит только динамический чертеж. В задаче сформулировано требование: с помощью проведения эксперимента с моделью исследовать зависимость радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники. При выставлении галочки в поле на слайд выводятся подсказки по проведению опытов с моделью и гипотеза, полученная в ходе эксперимента (рис. 2). Цель выполнения задания на слайде 2 — обучение учащихся элементам исследовательской деятельности.

На **слайде 3** учащимся предлагается доказать сформулированную гипотезу о зависимости радиусов окружностей. При этом с помощью флажков на слайде появляются только подсказки — этапы доказательства, осуществить которые учащиеся должны в своих тетрадях (рис. 3). Целью данного задания является отработка в интерактивном режиме умений доказывать математические факты.

Слайды 4 и 5 являются дополнением к рассмотренной задаче, где следует:

- найти сторону вписанного в треугольник квадрата, если известны гипотенуза и высота треугольника;

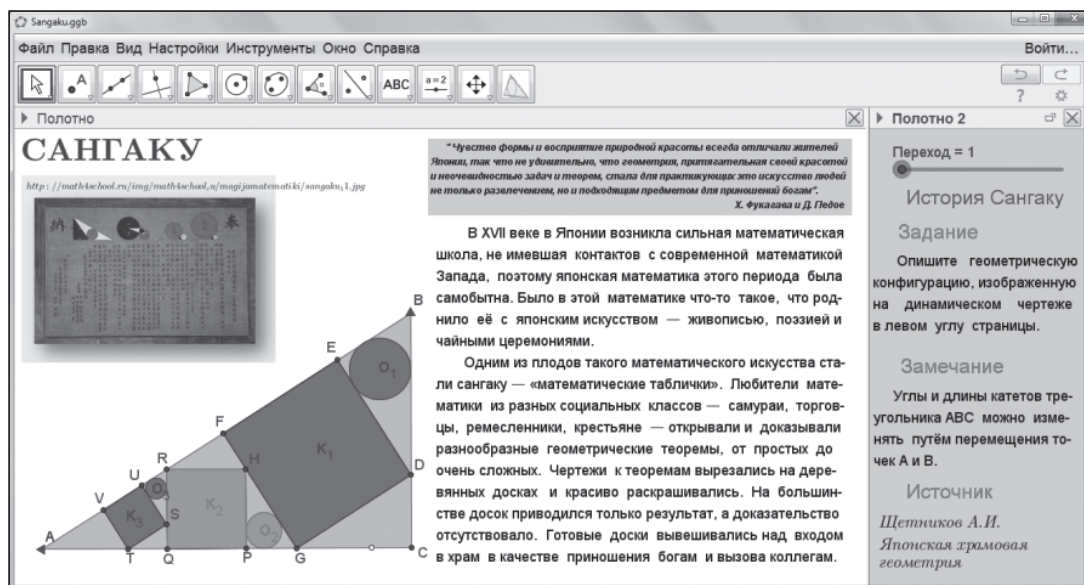
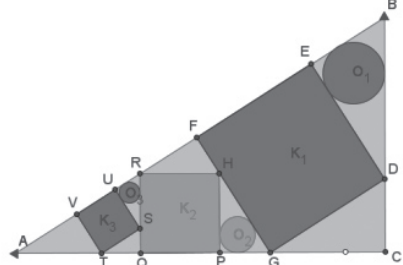


Рис. 1. История сангаку (слайд 1)

САНГАКУ
Метод подобия



1. Измеряем радиусы окружностей:
 $r_1 = 0.77$
 $r_2 = 0.45$
 $r_3 = 0.26$

2. Замечаем, что
 $r_1 \cdot r_3 = 0.77 \cdot 0.26 = 0.2$
 $r_2^2 = 0.45^2 = 0.2$
 $r_1 \cdot r_3 = r_2^2$

3. Гипотеза:
 $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$

Радиус второй окружности равен среднему геометрическому радиусов первой и третьей окружностей.

Переход = 2

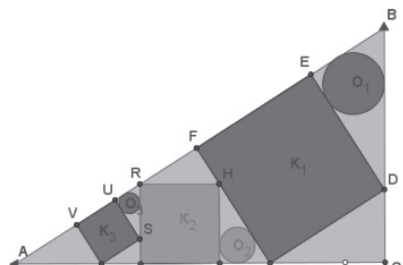
Задание

В прямоугольные треугольники последовательно вписываются квадраты и окружности. Определите экспериментально соотношение между радиусами трех первых окружностей этой последовательности. Сформулируйте гипотезу.

☒ Подсказка 1
☒ Подсказка 2
☒ Гипотеза

Рис. 2. Проведение эксперимента (слайд 2)

САНГАКУ
Метод подобия



План решения

- 1) Докажите подобие $\triangle ABC$ и $\triangle AFG$.
- 2) Найдите коэффициент подобия этих треугольников.
- 3) Докажите подобие $\triangle AFG$ и $\triangle ARQ$.
- 4) Найдите коэффициент подобия этих треугольников.
- 5) Сделайте вывод из пунктов 2 и 4.

Переход = 3

Задание

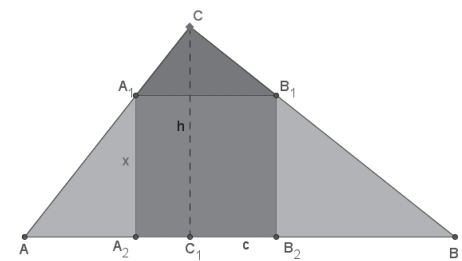
Докажите, что
 $\sqrt{r_1 \cdot r_3} = r_2$

☒ Подсказка 1
☒ Подсказка 2
☒ Подсказка 3
☒ Подсказка 4
☒ Подсказка 5

Источник задачи
<http://www.cut-the-knot.org>

Рис. 3. Доказательство гипотезы (слайд 3)

САНГАКУ — загадка построения
Метод подобия



План решения

- 1) Рассмотрите $\triangle A_1CB_1$ и $\triangle ACB$. Докажите, что они подобны.
- 2) Докажите, что $\frac{x}{c} = \frac{h-x}{h}$
- 3) Выразите из пропорции сторону квадрата

Ответ: $x = \frac{c \cdot h}{c + h}$

Переход = 4

Задание

Найдите сторону вписанного в прямоугольный треугольник квадрата, если известна гипотенуза c и высота h, к ней проведенная.

☒ Подсказка 1
☒ Подсказка 2
☒ Подсказка 3
☒ Ответ

Рис. 4. Нахождение стороны квадрата (слайд 4)

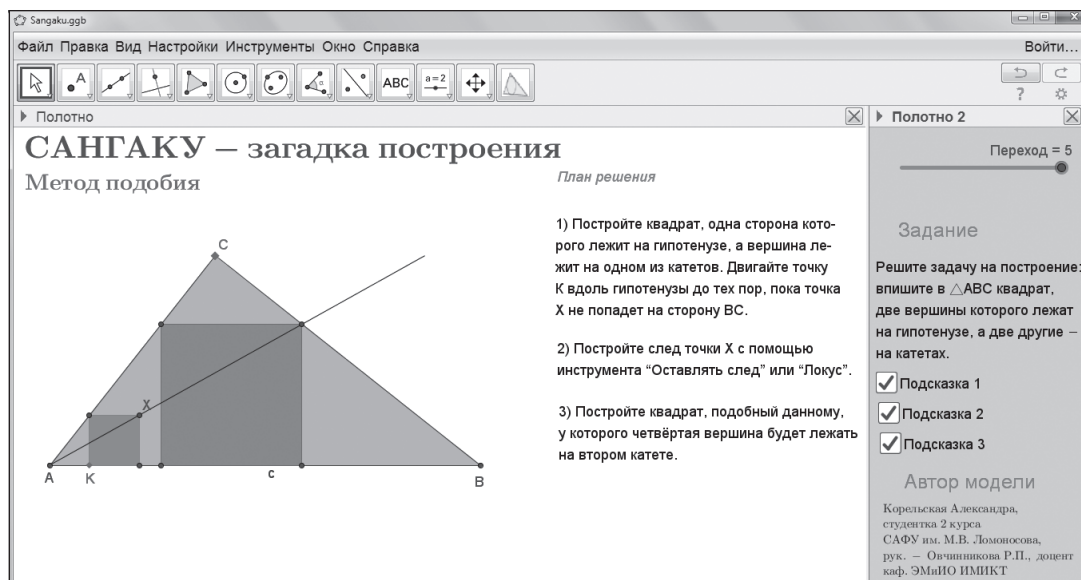


Рис. 5. Задача на построение (слайд 5)

- разгадать загадку построения рисунка — решить задачу на построение.

К задачам прилагаются чертежи и подсказки по поиску решения. Основное отличие подсказок слайда 5 от предыдущих — подсказка проведения эксперимента, построение следа и получение эвристики решения задачи — метода подобия. Целью выполнения задания на слайде 5 является получение нового метода решения задач в результате собственной практической деятельности учащихся.

Наличие подсказок при решении сформулированных задач способствует реализации на практике одного из основных принципов обучения — принципа индивидуализации. Более подготовленные ученики смогут решить задачу самостоятельно, менее подготовленные — воспользоваться указаниями.

Разработанная **интерактивная динамическая модель универсальна и может быть модифицирована в различных направлениях** (другие конфигурации, вопросы, подсказки, дополнительные разделы). На основе данной задачи сангаку возможно составить с учащимися аналогичные задачи с измененными данными для решения задач дома, организации проектной работы группы учащихся, исследовательской работы какого-либо одного учащегося. Например, найти:

- 1) сторону наибольшего вписанного квадрата, если известны катеты прямоугольного треугольника $\left(x = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + ab} \right)$;
- 2) коэффициент подобия k вписанных квадратов и окружностей, если известны:
 - а) гипотенуза и высота, опущенная на нее $\left(k = \frac{h}{c + h} \right)$;
 - б) два катета $\left(x = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + ab} \right)$;
- 3) сторону n -го вписанного квадрата $\left(x_n = a \left(\frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + ab} \right)^n, n \in \mathbb{N} \right)$;

- 4) соотношение между сторонами вписанных квадратов, если их смежные стороны лежат на катетах подобных треугольников $\left(k = \frac{b}{a + b} \right)$.

Последняя задача, кстати, является еще одной задачей сангаку (рис. 6).

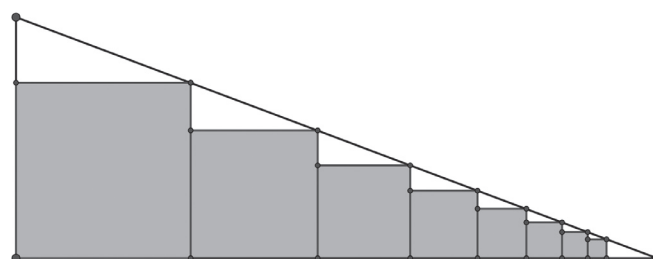


Рис. 6. Площади квадратов образуют геометрическую прогрессию

Сюжет данной задачи может быть рассмотрен при изучении других тем школьного курса математики:

- при изучении темы «Синус, косинус, тангенс» можно рассмотреть задачу с измененными данными: известна гипотенуза прямоугольного треугольника и острый угол α , необходимо найти сторону вписанного квадрата $\left(x = \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2 + \sin 2\alpha} \right)$;
- при изучении в школьном курсе алгебры темы «Прогрессии», в частности понятия геометрической прогрессии, ее свойств и признаков. Например, при решении задачи 3 на нахождение стороны n -го вписанного квадрата получаем, что сторона каждого последующего вписанного квадрата меньше стороны предыдущего в одинаковое число раз. Это число является знаменателем геометрической прогрессии для длин сторон вписанных квадратов. Сам же рисунок 6 является геометрической интерпретацией понятия геометрической прогрессии.

Так учащимся становится ясно происхождение термина «геометрическая прогрессия».

Кроме дидактических функций, указанных выше, данная модель, в соответствии с выделенными в современной теории дидактики принципами [6], выполняет следующие функции:

- возможность сочетания конкретного и абстрактного через демонстрацию абстрактного понятия «геометрическая прогрессия» и его конкретного образа в геометрии, репродуктивного и продуктивного через систему подсказок;
- формирование эстетических качеств личности через раскрытие понятия сангаку и его роли в культуре Японии и тем самым осуществление всестороннего развития личности обучающегося;
- показ целостности и единства процесса обучения путем решения задачи при изучении различных тем не только курса геометрии, но и алгебры;
- возможность рационального сочетания коллективных и индивидуальных форм учебной деятельности.

Использование задач сангаку на уроке, в электронном курсе может привлечь ряд учащихся класса к исследованию и решению подобных задач с последующим написанием исследовательской работы и участием в конкурсе исследовательских работ, к выполнению проектных заданий на построение

чертежей к задачам сангаку с использованием интерактивной геометрической среды. Например, построить динамическую модель задач 3–4, предварительно создав инструмент «квадрат, вписанный в треугольник».

Литературные и интернет-источники

1. Бакуров А. Н. Система динамических компьютерных моделей как средство обучения стереометрии учащихся средней школы // Ученые записки Орловского государственного университета. 2013. № 4.
2. Беляев С. А. Патент на новый вид математического творчества // Беляев-сан. Сайт о геометрии и ее преподавании. <https://belyaevsan.wordpress.com/category/сангаку/>
3. Беляев С. А. Сангаку: японская храмовая геометрия // Учим математике–3; под ред. А. Д. Блинкова, П. В. Чулкова. М.: МЦНМО, 2013.
4. Богомольный А. Сангаку: размышления о феномене. <http://www.shogi.ru/wasan/Bogomolny/sangaku.htm>
5. Гроздев С. И., Лазаров Б. Й. Два взгляда на организацию обучения математике основанное на васаи геометрии // Информационные ресурсы в образовании: Материалы Международной научно-практической конференции (г. Нижневартовск, 17–19 апреля 2013 года) / отв. ред. Т. Б. Казиахмедов. Нижневартовск: НВГУ, 2013.
6. Пидкасистый П. И., Мижеринов В. А., Юзефович Т. А. Педагогика: учебник для студентов учреждений высшего профессионального образования. М.: Академия, 2014.
7. Щетников А. И. Японская храмовая геометрия // Математика. 2006. № 17.

НОВОСТИ

МГУ, НИЯУ МИФИ и МФТИ возглавили рейтинг исследовательской деятельности университетов России

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» и Московский физико-технический институт (государственный университет) вошли в первую тройку рейтинга исследовательской деятельности университетов России, сообщает пресс-служба Национального рейтинга университетов.

МГУ взял в рейтинге 1000 баллов по тысячебалльной шкале, НИЯУ МИФИ чуть меньше — 914, а МФТИ — 909.

На четвертой строчке парада вузов — Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, а пятое место занимает Национальный исследовательский Томский государственный университет.

В десятку лучших также вошли Санкт-Петербургский государственный университет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Казанский федеральный университет, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Университет ИТМО и Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина.

На 11-й, 12-й и 13-й строчках находятся Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачева-

ского, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого и Национальный исследовательский Томский политехнический университет.

На 14-м месте — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», а на 15-м — Российский университет дружбы народов.

В двадцатке по исследовательской деятельности находятся: Южный федеральный университет, Белгородский государственный университет, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Пермский государственный национальный исследовательский университет и Санкт-Петербургский Академический университет — научно-образовательный центр нанотехнологий РАН.

Всего в исследовании участвовали 238 университетов страны. Рейтинг составлялся по уровню развития в вузах высокопроизводительных вычислений и математического моделирования, публикационной активности и цитируемости по данным систем Scopus и РИНЦ, а также по объемам финансирования университетами НИОКР.

Национальный рейтинг университетов — это специальный проект по независимой оценке вузов, созданный группой «Интерфакс».

(По материалам федерального портала «Российское образование»)