

С. Г. Иванов,

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина),

В. И. Рыжик,

лицей «Физико-техническая школа», Санкт-Петербург

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ И ПРОЕКТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ПЛАНИМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ «ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА»

Аннотация

В статье рассматривается новая методика решения задач по планиметрии, включающая эвристику, рациональные рассуждения и компьютерный эксперимент.

Ключевые слова: компьютерный эксперимент, эвристика, рациональные рассуждения.

В XX веке в школьное математическое образование вошли три продуктивные идеи: эвристика (в духе Д. Пойа), рациональные рассуждения (в духе прикладной математики) и компьютерные технологии.

В нашем проекте мы соединили эти идеи с традиционной методикой при изучении школьного курса планиметрии. Весь проект содержит 41 задачу и опубликован в книге [2].

В проекте используется компьютерная среда «Живая математика», методика применения которой подробно разобрана в [1, 2, 4]. В этой среде можно имитировать построения циркулем и линейкой, делать геометрические преобразования, проводить измерения и вычисления. Последовательность построений (алгоритм) можно зафиксировать в памяти компьютера для дальнейшего использования.

В этой статье мы расскажем о том, как дать школьнику возможность проявить себя в исследовательской и проектной деятельности при изучении планиметрии.

Для исследовательской деятельности учащихся мы предлагаем в задачной ситуации следующий сценарий:

1. Сюжет прикладного содержания.
2. Создание геометрической модели.
3. Эвристика.
4. Формулировка гипотезы.
5. Компьютерный эксперимент.
6. Корректировка гипотезы.
7. Рациональное подтверждение справедливости гипотезы.
8. Доказательство истинности гипотезы.
9. Поиск альтернативного решения.
10. Расширение задачи (обобщение, частные случаи).

Рассмотрим этот список подробнее.

1. Сюжет прикладного содержания. Коль скоро мы включаем ученика в исследовательскую деятельность, предлагаемая ему задача не может быть взята «с потолка» — она изначально имеет нарочито прикладной характер либо является развитием уже имеющихся результатов.

Контактная информация

Иванов Сергей Георгиевич, канд. пед. наук, доцент кафедры высшей математики — 2 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); адрес: 197022, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5; телефон: (812) 234-63-81; e-mail: sg_ivanov@mail.ru

Рыжик Валерий Идельевич, канд. пед. наук, учитель математики лицея «Физико-техническая школа», Санкт-Петербург; адрес: 194021, г. Санкт-Петербург, ул. Хлопина, д. 8, корп. 3; телефон: (812) 534-58-17; e-mail: rvi@inbox.ru

S. G. Ivanov,

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI",

V. I. Ryzhik,

Physical and Technical School, Saint-Petersburg

RESEARCH AND PROJECT PROBLEMS IN PLANE GEOMETRY USING COMPUTER PROGRAM "THE GEOMETER'S SKETCHPAD"

Abstract

The article describes a new method for solving plane geometry problems, including heuristics, rational arguments and computer experiment.

Keywords: computer experiment, heuristics, rational arguments.

2. Создание геометрической модели. Геометрическая модель появляется в результате анализа сюжета прикладного содержания. Самостоятельное создание учащимся геометрической модели способствует более полному ее пониманию и позволяет творчески подойти к формулировке условия задачи.

В частности, ученик самостоятельно выбирает для решения достаточные и, возможно, необходимые данные.

3. Эвристика. Прежде чем использовать компьютерную технологию, чрезвычайно полезны предположения относительно окончательного результата. Эти предположения возникают в результате использования эвристик, как-то: аналогия, разбор частных случаев, проверка обратного утверждения и т. д.

4. Формулировка гипотезы. В итоге появляется (может появиться) гипотеза относительно ответа в задаче. Разумеется, она может быть целиком удачной или верной только по идее, или тупиковой, или даже ошибочной.

5. Компьютерный эксперимент либо опровергает возникшую гипотезу, либо корректирует ее, либо подтверждает. Если гипотеза возникла после эвристик, то компьютер (компьютерная программа) выступает как средство для ее проверки. Если же на предыдущем этапе гипотеза не появилась, то компьютер выступает как средство для ее создания.

Использование компьютера в геометрии особенно эффективно для:

- поиска известного объекта, удовлетворяющего условию;
- обнаружения свойств изучаемого объекта (например, симметрии);
- конструирования нового объекта, удовлетворяющего условию;
- наблюдения за изменяющимися геометрическими объектами и величинами, с ними связанными.

Мы полагаем, что компьютер в школьном математическом образовании играет примерно ту же роль, что и прибор в физической лаборатории.

Если мы доверяем результатам эвристики и компьютерного эксперимента, то считаем, что гипотеза проверена.

Если результаты компьютерного эксперимента не совпали с нашими предположениями (например, при эксперименте не удалось построить объект, удовлетворяющий данным условиям), можно выдвинуть новую гипотезу и перейти к ее проверке.

6. Корректировка гипотезы. Не исключено, что предложенная гипотеза ошибочна в целом. И эвристики могут завести в тупик. Тщательный компьютерный эксперимент позволяет это обнаружить. Тогда исходную гипотезу надо сменить или подправить.

7. Рациональное подтверждение справедливости гипотезы. Предположим, однако, что сомнения в справедливости гипотезы остаются и после компьютерного эксперимента. Например, свойство фигуры, которое мы хотим обнаружить, отсутствует и непонятно, доказано ли его отсутствие. Другой пример — вычислительный эксперимент, когда неясность возникает из-за наличия погрешностей, обусловленных структурой дисплея. Тогда мы переходим к поиску рациональных рассуждений, под-

тверждающих гипотезу. Рациональное рассуждение использует наглядность, симметрию, непрерывность, постоянство измеряемой величины в конкретных случаях, движение, а также соображения, взятые из механики.

Непрерывность используется в двух ситуациях:

- если некоторое свойство фигуры выполняется в какой-то точке, то оно выполняется в малой окрестности этой точки (так называемый метод «малых шевелений»);
- если при движении точки по определенной линии некая величина, связанная с данной фигурой, может быть меньше определенного значения и больше него, то существует такое положение переменной точки, когда эта величина равна этому значению.

Предположение о постоянстве величины, связанной с данной фигурой, возникает тогда, когда эта величина принимает одинаковые значения в трех разных конкретных случаях. Это предположение основано на том, что исследуемая величина, возможно, задается линейной или квадратичной функцией, что, как правило, встречается в геометрии.

8. Доказательство истинности гипотезы. Если предыдущая работа оставляет сомнения, то проведем доказательство в обычном стиле. Пример тому будет приведен ниже.

9. Поиск альтернативного решения всегда желателен. Найденное, оно уменьшает вероятность ошибки в первом решении и способствует развитию гибкости мышления, а также укрепляет внутрипредметные связи (в книге [2] мы их приводим).

10. Расширение задачи. В исследовательской деятельности решенная задача необходимо предполагает продолжение сделанной работы, поэтому мы формулируем новые задачи, порожденные уже решенной задачей (обычно таких задач-расширений две).

Расширения решенной задачи позволяют создать условия для проектной деятельности*. Собственно задачи-расширения и предлагаются для осуществления этой деятельности — как отправная точка проекта. В самом проекте изначально дана геометрическая задача. Предлагается создать некий сюжет прикладного характера, который приводит к предлагаемой задаче. Затем в процессе решения задачи учащийся проходит этапы 3–10. Заканчивается проект созданием последующего расширения (по возможности).

Покажем, как выглядит предложенная схема работы с задачей, на конкретном примере, взятом из [2].

Задача «Клад на острове».

1. Сюжет прикладного содержания.

В 1785 году на маленьком острове в Карибском море пираты закопали клад. Для того чтобы впоследствии найти клад, они в качестве ориентиров заметили две высокие горы и пальмовое дерево. Позже записка с описанием поиска клада попала к исследователям. Текст записки гласил:

* Под проектной деятельностью школьника в данном случае мы подразумеваем освоение учащимся предлагаемой нами методики работы с задачей.

«От пальмы идите к Соколиной горе и считайте шаги. Затем поверните под прямым углом направо, сделайте такое же количество шагов и воткните в землю палку.

Вернитесь к пальме и идите к Орлиной горе, считая шаги. Поверните под прямым углом налево и сделайте такое же количество шагов. Воткните в землю другую палку.

В этом случае клад будет точно посередине между двумя палками».

Исследователи нашли обе горы, но пальмы на месте уже не было. Можно ли им теперь найти клад?

2. Создание геометрической модели (рис. 1).

Два равнобедренных прямоугольных треугольника KFT ($KF = FT$) и LET ($TE = EL$) имеют единственную общую точку T . Точка M — середина отрезка KL . Зависит ли положение точки M от точки T ?

3. Эвристика.

Вариант 1. Рассмотрим сначала положение точки T посередине между точками E и F . В этом случае мы получаем точку M на серединном перпендикуляре к отрезку EF , удаленную от середины отрезка EF на половину его длины (рис. 2).

Вариант 2. Затем рассмотрим случай, когда точка T совпадает с одной из точек E или F , например с точкой F . В этом случае получаем середину гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, один из катетов которого EF (рис. 3).

Точка, полученная в варианте 1, совпадает с точкой, полученной в варианте 2 (рис. 4).

4. Формулировка гипотезы. На основе двух наблюдений высказываем предположение, что положение точки M не зависит от положения точки T .

5. Компьютерный эксперимент. Выбираем произвольные точки T , E и F и строим точку L , поворачивая точку T на 90° вокруг точки E по часовой

стрелке. Далее строим точку K , поворачивая точку T на 90° вокруг точки F против часовой стрелки. Затем строим середину отрезка KL — точку M . Перемещаем точку T и убеждаемся в том, что расположение точки M остается неизменным (рис. 5).

6. Корректировка гипотезы. В рассматриваемой задаче компьютерный эксперимент подтвердил гипотезу. Двигаемся дальше.

7. Рациональное подтверждение справедливости гипотезы.

Пусть точка T движется в восточном направлении. Поскольку точка K получена поворотом точки T вокруг точки F на 90° против часовой стрелки, точка K будет двигаться с той же постоянной скоростью в северном направлении. Поскольку точка L получена поворотом точки T вокруг точки E на 90° по часовой стрелке, точка L будет двигаться с той же скоростью в южном направлении (рис. 6).

Поскольку скорости точек K и L равны по модулю, но противоположно направлены, скорость точки M — середины отрезка KL — равна нулю, и положение середины M отрезка KL не зависит от положения точки T .

8. Доказательство истинности гипотезы.

Решение задачи в традиционном стиле будет следующим (рис. 7).

Пусть точка T обозначает пальму, точки K и L — палки; точка M — середина отрезка KL , точки F и E — центры поворота (горы).

Построим прямую EF (полагаем, что точки K , L и T расположены по одну сторону от прямой EF), проведем к ней перпендикуляры из точек K , T , M и L , т. е. точки K_1 , T_1 , A , L_1 — проекции точек K , T , M , L на прямую EF .

Поскольку $KK_1 \perp EF$, $MA \perp EF$, $LL_1 \perp EF$, то $KK_1 \parallel LL_1$, поэтому KK_1LL_1 — трапеция (в случае $KL \perp LL_1$ трапеция становится прямоугольником).

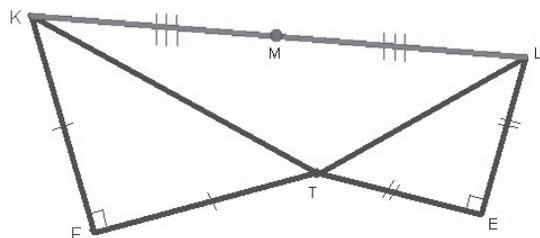


Рис. 1

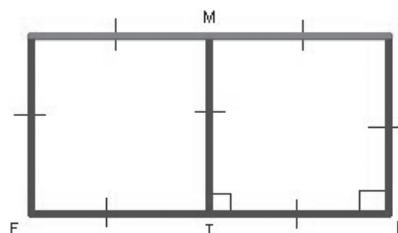


Рис. 2

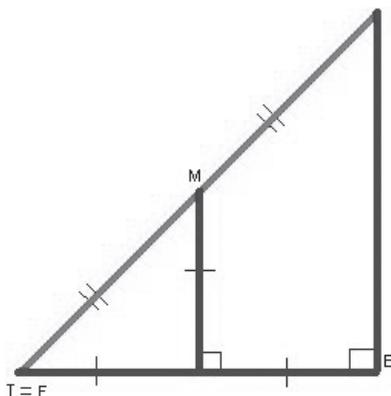


Рис. 3

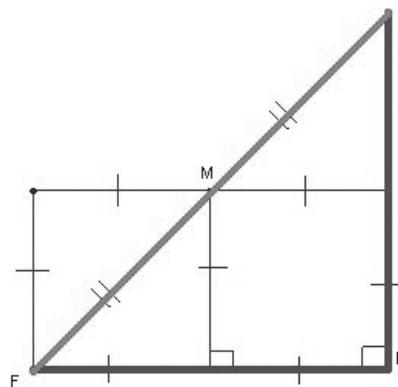


Рис. 4

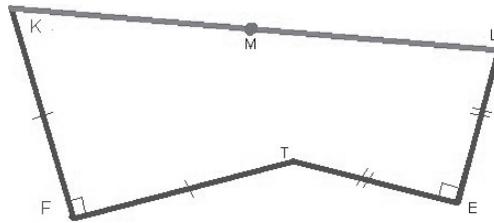


Рис. 5

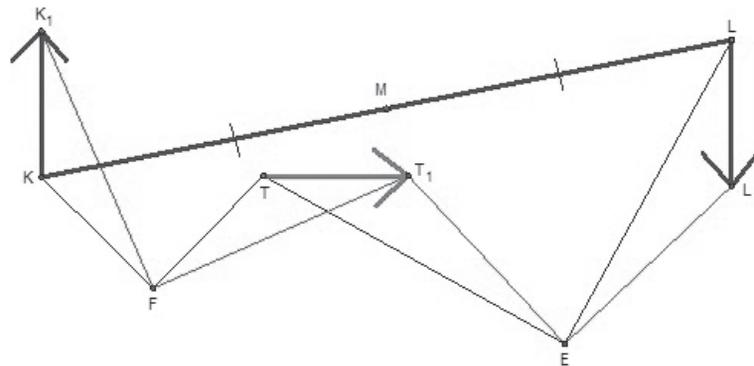


Рис. 6

$MA \perp EF$ и $KM = ML$, значит, MA — средняя линия этой трапеции, следовательно, $MA = \frac{1}{2}(KK_1 + LL_1)$.

$\triangle FKK_1$ и $\triangle TTT_1$ — прямоугольные треугольники с равными гипотенузами (поскольку $FK = FT$ по построению). Поскольку $KK_1 \perp FT_1$ и $KF \perp FT$, получаем: $\angle K_1KF = \angle TTT_1$, следовательно, $\triangle FKK_1 = \triangle TTT_1$ и $KK_1 = FT_1$. Аналогично доказывается, что $\triangle ELL_1 = \triangle TET_1$ и $LL_1 = ET_1$.

Далее:

$$MA = \frac{1}{2}(KK_1 + LL_1) = \frac{1}{2}(FT_1 + ET_1) = \frac{1}{2}EF.$$

Поскольку расстояние EF постоянно, длина отрезка MA также постоянна. Кроме того, поскольку MA — средняя линия трапеции, то $K_1A = AL_1$. Из равенства треугольников, доказанного выше, следует, что $TT_1 = K_1F = EL_1$. Вычитая из равных длин K_1A и AL_1 равные длины K_1F и EL_1 , получим $FA = AE$, т. е. A — середина отрезка EF . Становится ясно, что точка M — это пересечение прямой KL и серединного перпендикуляра отрезка EF .

9. Поиск альтернативного решения.

Альтернативное решение использует свойства поворота и композиции поворотов.

Рассмотрим композицию поворотов на 90° вокруг точек E и F — именно в такой последовательности. Результатом является поворот на 180° , т. е. центральная симметрия. В результате композиции

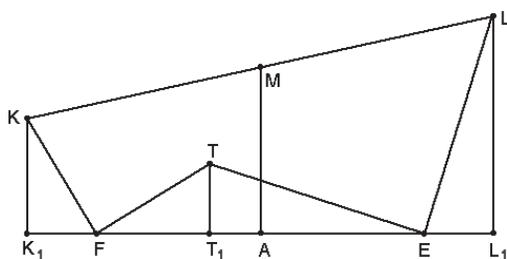


Рис. 7

этих поворотов точка L переходит в точку K . Следовательно, центром симметрии является середина M отрезка KL . Из свойств композиции двух поворотов с разными центрами получаем [3], что углы MFE и MEF равны половине угла поворота, т. е. они равны 45° . Следовательно, треугольник EMF — прямоугольный и равнобедренный. Так как такой треугольник строится на гипотенузе EF в заданную полуплоскость однозначно, то положение точки M также однозначно — это середина отрезка KL .

10. Расширение задачи.

- Как изменится расположение клада при изменении взаимного расположения гор и пальмы?
- Квадраты $TELD$ и $TFKC$ построены на сторонах треугольника TEF , вершины которого соответствуют горам и дереву. Проведите из вершины T медиану и высоту в треугольниках TCD и TEF соответственно. Исследуйте взаимное положение этих отрезков.

Предлагаемая нами методика работы с задачей прошла успешную апробацию в нескольких школах Санкт-Петербурга.

Литература

1. Иванов С. Г. Сочетание дискуссии с экспериментом на уроке математики // Компьютерные инструменты в школе. 2009. № 2.
2. Иванов С. Г., Рыжик В. И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». М.: Просвещение, 2013.
3. Понарин Я. П. Геометрия для 7–11 классов. Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
4. Рыжик В. И., Люблинская И. Е. (совместно с Armontrout R., Boswell L., Corica T.). Исследовательские сюжеты для среды «The Geometer's Sketchpad». СПб.: ЦПО «Информатизация образования», 2003.