

**Т. Ф. Сергеева,**  
Академия социального управления, г. Москва,

**Р. П. Овчинникова,**  
Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ КАК ОСНОВА ИНТЕГРАЦИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

### Аннотация

В статье описываются технические характеристики интерактивных геометрических сред как средства визуализации геометрических объектов и раскрываются их возможности в обеспечении интеграции математики и информатики посредством анализа существующих и создания новых инструментов; предлагается система заданий, направленных на формирование конструкторских умений школьников и развивающих их операционное, логическое и алгоритмическое мышление.

**Ключевые слова:** интерактивная геометрическая среда, геометрия, исследовательское обучение.

Сегодня уже невозможно представить систему образования без информационно-коммуникационных технологий. Внедрение ИКТ в подготовку школьников и студентов представляет собой инновационный процесс, который обеспечивает личностно-ориентированный характер обучения, дифференцированный подход к выбору средств и форм его организации, вариативность содержания. Следует отметить, что к существенному повышению эффективности образовательного процесса приводит не использование ИКТ само по себе, а только такая организация деятельности обучающихся, которая обеспечивает их мотивацию и тем самым стимулирует к самостоятельному приобретению знаний и саморазвитию.

Среди всех существующих ИКТ для математического образования особое значение имеют **интерактивные геометрические среды (ИГС)**, которые представляют собой программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения на

компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными. Например, при перемещении прямой перпендикуляр к ней также переместится, оставаясь перпендикулярным к прямой. Таким образом, чертеж, созданный в интерактивной геометрической среде, представляет собой модель, реализующую заданные отношения между геометрическими объектами [3].

Появление ИГС оказало существенное влияние на процесс обучения математике за счет возможностей наглядной визуализации и динамического моделирования математических объектов.

Кроме уже указанных отличительных особенностей интерактивные геометрические среды обладают также другими возможностями: изменять стиль и цвет линий, оставлять след движущихся геометрических объектов и автоматически перемещать их и др.

### Контактная информация

**Сергеева Татьяна Федоровна**, доктор пед. наук, профессор, зав. кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин Академии социального управления, г. Москва; *адрес:* 129344, г. Москва, ул. Енисейская, д. 3, корп. 5; *телефон:* (499) 189-12-76; *e-mail:* crr1@mail.ru

**Овчинникова Раиса Петровна**, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; *адрес:* 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *телефоны:* (8182) 21-61-07, (8182) 21-61-00, доб. 19-13; *e-mail:* r.ovchinnikova@narfu.ru

**T. F. Sergeeva,**  
Academy of Public Administration, Moscow,  
**R. P. Ovchinnikova,**  
Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk

### THE USE OF INTERACTIVE GEOMETRY SOFTWARE WHEN TEACHING GEOMETRY AS A BASIS FOR THE INTEGRATION OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

#### Abstract

The article describes the technical characteristics of interactive geometry software as a means of visualization geometric objects and their features to ensure the integration of mathematics and informatics through the analysis of existing and new instruments; a system of tasks aimed at the formation of the design skills of students and developing their operational, logical and algorithmic thinking is offered.

**Keywords:** interactive geometry software, geometry, research training.

Система операций интерактивных геометрических сред совпадает с системой операций, характерной для самой геометрии (построить прямую, проходящую через точку; провести окружность заданного радиуса с центром в точке  $A$  и т. д.). При этом ИГС обладают расширенным по сравнению с геометрией «на бумаге» набором элементарных операций (включающим, например, деление отрезка пополам или вписывание треугольника в окружность). Это значительно упрощает построение модели геометрической задачи, так как для создания чертежа достаточно последовательно выполнять в интерактивной геометрической среде операции, указанные в условии задачи.

Укажем ряд технических характеристик ИГС, которые могут быть обозначены как конструктивные, графические, вычислительные, презентационные, верификационные и возможности управления интерфейсом.

К числу **конструктивных возможностей** ИГС относятся:

- построения с помощью основного инструментария — виртуальной линейки и циркуля;
- простые и быстрые по сравнению с традиционными средствами построения перпендикуляров, параллельных линий, середин отрезков, геометрических мест точек, объектов, задаваемых с помощью геометрических преобразований и аналитически в координатах;
- создание собственных инструментов.

**Графические возможности** ИГС заключаются в разнообразии оформления чертежа: варьирование в оформлении линий, точек, многоугольников с помощью разных стилей, толщины или формы, цвета или узора заливки и т. д. Задание так называемых установок по умолчанию позволяет единожды выбрать оформление, после чего все вновь добавленные в модель геометрические объекты будут выглядеть указанным образом. Инструмент копирования стиля и настройка оформления сразу группы объектов позволяют сократить время на оформление. В ИГС к чертежу можно добавлять картинки (рисунки) объектов реального мира.

**Вычислительные возможности.** В системе операций ИГС присутствуют инструменты для измерения и изменения параметров модели (углов, длин, площадей). Значения величин можно записывать в таблицы и выполнять с ними различные арифметические операции.

**Презентационные возможности.** В части ИГС есть инструменты для:

- создания *демонстраций по заданному сценарию*, по которому изменения модели будут происходить в автоматическом режиме;
- *анимации* геометрических объектов — автоматического перемещения точек вдоль заданных траекторий;
- *скрытия части фигур* для «облегчения» чертежа, удаления вспомогательных построений и лучшего восприятия геометрической конструкции;
- *визуализации траекторий (следов)* движущихся геометрических объектов.

**Верификационные возможности.** Некоторые ИГС могут контролировать:

- правильность введенного числового ответа, текстовой строки и других форм ответов;
- наличие в построении заданных геометрических объектов, сообщая учащемуся (например, в виде подсказки), выполнено построение в полном объеме или чего-то не хватает.

Тексты таких сообщений, подсказок, реакций на неверные и неполные ответы определяются автором задания.

**Управление интерфейсом.** Важной особенностью ИГС является возможность *изменять набор инструментов*, помещаемых на инструментальную панель, и *вид рабочего полотна*: отображать координатную сетку с осями или без них для построения графиков уравнений и вычерчивания геометрических фигур с использованием свойств сетки, использовать одновременно два чертежных полотна, отображать таблицу, протокол построения и пр.

К настоящему времени накоплен существенный опыт использования ИГС, связанный с организацией исследовательского обучения школьному курсу геометрии [3] и появлением нового направления — экспериментальной математики [4]. В настоящей статье покажем **еще один аспект применения ИГС при обучении школьному курсу геометрии — анализ возможностей инструментов чертежной плоскости и создание новых инструментов.**

Учитывая возможности ИГС, обучение геометрии с их применением может быть представлено как процесс поэтапного овладения математической деятельностью в ходе целенаправленной управляемой самостоятельной работы учащихся по решению учебно-исследовательских задач на визуализацию, трансформацию и исследование математических моделей геометрических объектов.

Использование ИГС позволяет визуализировать целое множество геометрических образов путем построения **динамической модели геометрического объекта** — динамического чертежа, построенного средствами ИГС. Такой чертеж в отличие от статического допускает изменение положения на чертежной плоскости какого-либо из характеристических элементов чертежа или задание изменений исходного значения какой-либо величины при сохранении алгоритма построения.

Таким образом, под **динамизацией** понимается, прежде всего, процесс исследования математических объектов с помощью изменения определяющих их параметров, установление функциональных связей и инвариантов.

Динамизацию геометрических объектов можно использовать двояко: как цель (при этом формулируются динамические задачи) и как средство (при этом любая нединамическая задача проходит через динамику).

Динамизация геометрического объекта позволяет учащимся выявить существенные (инвариантные) и несущественные (вариативные) его свойства, установить дополнительные свойства, раскрыть зависимость одних свойств от других и построить на этой основе теоретическую модель геометрического объекта — его описание с помощью понятийного аппарата геометрии определением понятия и теоремами.

Следует отметить, что такая работа позволяет обеспечить **содержательную интеграцию математики и информатики**, так как, с одной стороны, абстрактные по своей природе геометрические понятия обретают реальное изображение, а с другой, при их создании школьникам требуется применять умения планировать структуру действий, систематизировать и оптимизировать свою деятельность.

**Работа с инструментами может быть представлена следующей системой:**

- определение неизвестного учащимся инструмента;
- использование освоенных инструментов для создания различных конструкций, встречающихся в реальной жизни;
- определение соответствия инструмента объему изучаемого геометрического понятия;
- создание собственных инструментов.

На этапе введения геометрического понятия может быть предложено задание на **определение неизвестного учащимся инструмента**, появившегося на панели инструментов. Так, например, введению определения «перпендикулярные прямые» может предшествовать задание на узнавание объекта, строящегося с помощью инструмента, название которого неизвестно, а пиктограмма скрыта под знаком ✂: «Ученик седьмого класса сконструировал новый инструмент в ИГС, но не нашел для него подходящей пиктограммы и забыл назвать. Постройте с помощью инструмента, сконструированного учеником, несколько объектов нового понятия. Охарактеризуйте свойства образовавшихся объектов, выполнив дополнительно необходимые измерения». В результате использования инструмента на чертежной плоскости у учащихся появляются две пересекающиеся прямые. Для уточнения их характеристики учащиеся должны измерить величины четырех углов, образованных ими. В результате измерения все четыре угла получаются равными — по  $90^\circ$ . Учащимся из курса математики шестого класса известно, что такие прямые называются перпендикулярными. Заметим, что посредством выполнения заданий на определение инструмента возможно ознакомить учащихся с такими геометрическими понятиями, как «перпендикуляр к прямой», «треугольник», «медиана», «биссектриса треугольника» и др.

**Использование освоенных инструментов для создания различных конструкций, встречающихся в реальной жизни**, позволяет учащимся получить представление о практическом применении геометрии, увидеть отражение абстрактных геометрических понятий в реальном мире и возможности их визуализации с использованием ИГС.

В качестве заданий учащимся могут быть предложены следующие: сделать чертеж дома или участка, нарисовать план комнаты, изобразить схему движения и др.

Работа по **определению соответствия инструмента объему изучаемого геометрического понятия** проводится на этапе усвоения понятия. В качестве примера рассмотрим несколько заданий.

**Задание 1.** Один из инструментов ИГС *Высота треугольника* выполняет построения с ошибкой. Найдите ошибку и сконструлируйте новый инстру-

мент для правильного построения объектов, соответствующих понятию «высота треугольника».

При составлении таких заданий ошибку в алгоритме построения инструмента целесообразно делать в шаге, соответствующем наиболее часто встречающейся ошибке при формулировании определения. Так, определение высоты треугольника учащиеся часто воспроизводят следующим образом: «Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к противоположной стороне». Поэтому инструмент *Высота треугольника*, построенный на основе такого определения, не будет строить высоты, проведенные из острого угла тупоугольного треугольника. Эту ошибку и должны найти учащиеся.

**Задание 2.** Учитель предложил учащимся седьмого класса создать в ИГС личный инструмент *Параллелограмм*. Проведите экспертизу инструментов и выясните, какие из них правильные.

При разработке таких заданий следует для экспертизы предложить инструменты для построения фигур, обладающих несущественными признаками (например, у всех построенных данным инструментом параллелограммов острый угол равен  $45^\circ$ ) или не имеющих хотя бы одного из существенных признаков (например, инструмент строит трапеции).

**Задание 3.** Постройте динамическую модель параллелограмма с помощью инструмента чертежной плоскости *Параллелограмм*. Используя инструменты измерения длин и углов, исследуйте длины противоположных сторон и величины противоположных углов параллелограмма. Сформулируйте гипотезы о длинах противоположных сторон и величинах противоположных углов параллелограмма.

**Создание собственных инструментов** может быть использовано как в рамках работы с понятиями на уроке, так и для организации внеурочной проектно-исследовательской деятельности школьников. Мотивирующими факторами для конструирования инструмента являются:

- введение нового геометрического понятия и отсутствие соответствующего инструмента в линейке инструментов ИГС;
- сложность построения объекта изучаемого понятия;
- необходимость многократного использования инструмента для построения чертежа;
- проведение исследования, требующего использования нового инструмента и др.

Рассмотрим, как можно познакомить учащихся с алгоритмом построения собственных инструментов на примере изучения понятия угла:

«Создайте инструмент *Угол* в ИГС GeoGebra, следуя инструкции:

- 1) Постройте в ИГС произвольный угол  $ABC$ , используя инструменты *Точка* и *Луч*.
- 2) Выберите в главном меню команду *Инструменты, Создать инструмент*.
- 3) В появившемся диалоговом окне активируйте вкладку *Выходные объекты* и из выпадающего списка выберите объекты, являющиеся результатом построения, — лучи  $a$  и  $b$ . (Замечание. Если после первого шага выделить лучи  $BA$  и  $BC$  с помощью инструмента *Переместить*

при нажатой на клавиатуре клавише Shift, то входные объекты появятся автоматически.)

- 4) Активируйте вкладку *Входные объекты*. Проверьте: там автоматически должны быть указаны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . (*Замечание.* Обратите внимание на последовательность расположения входных данных. Вершину угла  $B$  расположите между  $A$  и  $C$ , выделяя необходимый объект и изменяя его расположение с помощью кнопок «вверх» и «вниз».)
- 5) Активируйте вкладку *Имя и значок*. Назовите инструмент *Угол*, опишите последовательность выбора входных объектов: точка, вершина угла, точка.
- 6) Выберите соответствующий значок для изображения инструмента из папки «Инструменты» и с помощью флажка включите параметр *Показывать на панели инструментов*.
- 7) Нажмите кнопку *Завершить*.
- 8) Проверьте правильность работы вашего инструмента».

Выполняя задания по инструкции, учащиеся не только знакомятся с алгоритмом построения инструмента, но и закрепляют понятие угла.

В результате выполнения задания: «Составьте алгоритм построения инструмента *Перпендикулярные прямые* и сконструируйте его» учащимися может быть получено несколько алгоритмов, среди которых выбирается оптимальный, с наименьшим числом шагов. В результате данной работы учащиеся повторяют ранее изученные понятия смежного и вертикального углов, а также могут скорректировать определение перпендикулярных прямых, оставив среди существенных признаков наличие хотя бы одного прямого угла.

Созданию нового инструмента можно предпослать задание на отбор тех инструментов, которые будут задействованы при его построении. Приведем примеры таких заданий.

**Задание 1.** Отберите из данной группы инструментов те, которые потребуются для создания инструмента *Параллелограмм*: *Точка*, *Параллельная прямая*, *Перпендикулярная прямая*, *Пересечение объектов*, *Многоугольник*.

**Задание 2.** Составьте алгоритмы создания инструмента *Параллелограмм*, основанные на различных признаках параллелограмма.

**Задание 3.** Можно ли создать инструмент *Параллелограмм*, используя набор следующих инструментов: *Точка*, *Центральная симметрия*, *Многоугольник*?

Построение не всякого инструмента учащиеся могут выполнить на этапе изучения его определения. Например, при построении инструмента *Биссектриса угла* на основе определения возникает проблема откладывания угла данной величины в определенном направлении. Создание инструмента *Биссектриса угла* становится возможным после изучения темы «Треугольники» и может быть основано:

- на свойстве равнобедренного треугольника: «Высота равнобедренного треугольника, про-

веденная к основанию, является медианой и биссектрисой»;

- на признаках равенства треугольников и реализовано при решении в ИГС задачи 175\*: «На сторонах угла  $XOY$  отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  так, что  $OA = OB$ ,  $AC = BD$ . Прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что луч  $OE$  — биссектриса угла  $XOY$ . Опишите способ построения биссектрисы угла, основанный на этом факте» [1].

**Для проектно-исследовательских работ учащихся могут быть предложены следующие задания:**

**Задание 1.** Создайте оптимальный набор инструментов для изучения темы «Параллельные прямые».

**Задание 2.** Создайте набор инструментов для выполнения операций над векторами.

**Задание 3.** Придумайте инструмент, с помощью которого можно выполнить чертеж дома (лодки, участка) по заданным параметрам.

**Задание 4.** Создайте набор инструментов для дизайнера, занимающегося разработкой мозаичных узоров и орнаментов. Постройте найденные или придуманные вами орнаменты в ИГС с помощью созданных инструментов.

**Задание 5.** Найдите в сборниках задач, в Интернете задачи на построение с помощью двусторонней линейки. Создайте инструмент *Двусторонняя линейка*. Решите найденные задачи в ИГС с использованием построенного инструмента.

Современный образовательный процесс ориентируется на достижение личностного результата образования, под которым понимают мотивы деятельности, систему ценностных отношений учащихся — к себе, к другим участникам образовательного процесса, к самому образовательному процессу, к объектам познания и результатам образовательной деятельности. В процессе описанной выше деятельности по анализу и созданию инструментов у учащихся развивается мотивация к математической деятельности с использованием средств ИКТ, формируются конструкторские умения, развивается операционное, логическое и алгоритмическое мышление, что, несомненно, можно отнести к метапредметным результатам обучения.

## Литература

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия, 7–9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2010.
2. Сергеева Т. Ф., Шабанова М. В. Какая геометрия нужна школе XXI века? // Математика в школе. 2012. № 8.
3. Сергеева Т. Ф., Ягола А. Г., Сервис И. Н. Информационные технологии в преподавании школьного курса геометрии: классика и современность // Современные тенденции развития естественнонаучного образования / под общ. ред. акад. В. В. Лунина. М.: МГУ, 2010.
4. Шабанова М. В., Овчинникова Р. П., Ястребов А. В., Павлова М. А. и др. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография. М.: Академия Естествознания, 2016.