

**М. В. Шабанова, М. А. Павлова,**

*Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск*

## КОЛЛЕКЦИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СЦЕНАРИЕВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕРАКТИВНЫХ ТВОРЧЕСКИХ СРЕД ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

### *Аннотация*

В статье представлено несколько типов педагогических сценариев использования интерактивных творческих сред (на примере GeoGebra) во внеучебной работе с учащимися, проявляющими интерес и склонности к занятиям математикой. Все описанные в статье сценарии были реализованы на пилотных площадках международного проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE). Авторы считают, что этот опыт будет интересен и полезен многим, кто ищет способы мотивации учащихся к дополнительным занятиям математикой, а также новые подходы к развитию детской одаренности в области математики.

**Ключевые слова:** интерактивная творческая среда, GeoGebra, дополнительное математическое образование, одаренные дети, учебная мотивация, педагогические сценарии.

### 1. Введение

Общеизвестно, что проблема выявления и поддержки молодых талантов, повышения мотивации подрастающего поколения к изучению математики вне школьной программы сегодня стоит очень остро. Об этом свидетельствуют многочисленные документы, определяющие стратегические задачи развития системы математического образования: Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом Российской Федерации 03.04.12); Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. Президентом РФ 23.12.13); Резолюция съезда учителей и преподавателей математики (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 28–30 октября 2010 года, Новосибирск, 17–18 ноября 2015 года).

Данная проблема имеет глобальный характер. Именно поэтому поискам способов ее решения по-

священы многие международные научно-образовательные проекты, реализуемые при поддержке ЕС (DynaMAT, Fibonacci, InnoMathEd, Mascil и др.). Этим вопросам посвящен и международный проект «Методики и информационные технологии в образовании» («Methodology and Information Technologies in Education» — MITE), объединивший ученых и учителей математики трех стран: России, Болгарии и Казахстана. В рамках этого проекта проводятся математические состязания для детей разного возраста («Математика и проектирование», «Перперикон», «Математический портфолио» и др.), разрабатываются методики и технологии организации индивидуальной и коллективной работы учащихся в области экспериментальной математики на уроках и во внеучебное время.

Опыт реализации мероприятий проекта показывает, что наибольший интерес у школьников всех стран — участниц проекта вызывает деятельность, организуемая с использованием интерактивных твор-

### **Контактная информация**

**Шабанова Мария Валерьевна**, доктор пед. наук, профессор, зав. кафедрой экспериментальной математики и информатизации образования Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; *адрес:* 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *телефон:* (8182) 21-61-00, доб. 19-13; *e-mail:* m.shabanova@narfu.ru

**Павлова Мария Александровна**, аспирант кафедры экспериментальной математики и информатизации образования Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; *адрес:* 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *телефон:* (8182) 21-61-00, доб. 19-13; *e-mail:* m.pavlova@narfu.ru

**M. V. Shabanova, M. A. Pavlova,**

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk

### **COLLECTION OF PEDAGOGICAL SCENARIOS OF USING DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE FOR STUDENTS' EXTRACURRICULAR MATHEMATICS ACTIVITIES**

#### **Abstract**

The article presents some types of pedagogical scenarios of using dynamic geometry software (for example GeoGebra) for organization students' extracurricular mathematics activities. These scenarios may be used not only for gifted students, but for students that have interests to mathematics and didn't have enough knowledge for it. These scenarios were developed and tested in framework of International project «Methodology and Information Technologies in Education» (MITE). Authors think that teachers who are finding ways for develop students' motivation and students' abilities may be interested in these pedagogical scenarios.

**Keywords:** dynamic geometry software, GeoGebra, extracurricular mathematics education, gifted students, learning motivation, pedagogical scenarios.

ческих сред (систем динамической геометрии). Ученики с большим успехом используют возможности программных продуктов этого класса как для решения учебных задач (создания динамических визуализаций понятий и теорем, тренажеров, поддержки решения школьных задач), так и для реализации достаточно серьезных исследовательских проектов. Представим читателю несколько разновидностей педагогических сценариев, которые, по мнению участников проекта, являются наиболее эффективными.

## 2. От сюжетной задачи к самостоятельному исследованию

Этот вид педагогических сценариев хорошо подходит для занятий математического кружка или проведения разовых научно-популярных занятий со школьниками. Основу его составляет задача с исследовательским сюжетом, для решения которой необходимо привлечение компьютерного эксперимента (КЭ). Большое количество таких задач представлено в пособии для учителя С. Г. Иванова и В. И. Рыжика [3]: «Археологическая находка», «Клад на острове», «Котенок на лестнице» и др. Встречаются они и в научных статьях, посвященных вопросам обучения математике с использованием систем динамической геометрии, в учебных материалах, подготовленных в рамках международных проектов («Где построить аэропорт?» [7], «Вокруг теоремы Наполеона» [8], «Компьютерный GeoCaching» [10], «Задача на Пасху» [9], «Приключения Буратино» [1] и др.). Главное предназначение сюжета задачи и ее названия — привлечь учащихся, вызывать желание решить ее.

В 2014–2016 годах при Северном (Арктическом) федеральном университете имени М. В. Ломоносова был организован кружок «Экспериментальная математика» для учащихся VII–IX классов. Полная программа кружка представлена в Интернете [4]. Из нее видно, что каждое занятие кружка — это решение одной задачи с исследовательским сюжетом, некоторые из которых заимствованы нами из представленных выше источников, другие составлены самостоятельно.

Как же организовано движение от сюжетной задачи к самостоятельному исследованию?

На каждом занятии учащиеся вовлекаются в деятельность, схожую с деятельностью ученых в области



Рис. 1. Цикл экспериментальной математики

экспериментальной математики, по единому циклу (рис. 1).

Рассмотрим реализацию данного цикла на примере работы с задачей «Компьютерный GeoCaching».

Начинается занятие (*первый этап* — «Постановка задачи») с рассказа об истории игры GeoCaching [2] и демонстрации роли GPS-навигатора в ней. Затем ставится вопрос о принципах работы GPS-навигатора. Для ответа на этот вопрос учащимся предлагается смоделировать с помощью подручных средств ситуацию его взаимодействия со спутником (рис. 2). В результате этой работы учащиеся приходят к выводу формулы определения расстояния от GPS-навигатора до места, над которым находится спутник.

*На втором этапе «Обоснование привлечения компьютерного эксперимента»* учитель ставит перед учащимися вопрос о том, с каким количеством спутников должен связаться GPS-навигатор, чтобы определить свою геопозицию. В ходе настольной игры и совместного обсуждения учащиеся получают несколько альтернативных гипотез, возможно, подтвержденных примерами ситуаций:

- необходимо получить данные от трех спутников;
- существуют случаи, когда достаточно данных от двух спутников;
- существуют случаи, когда данных от трех спутников недостаточно.

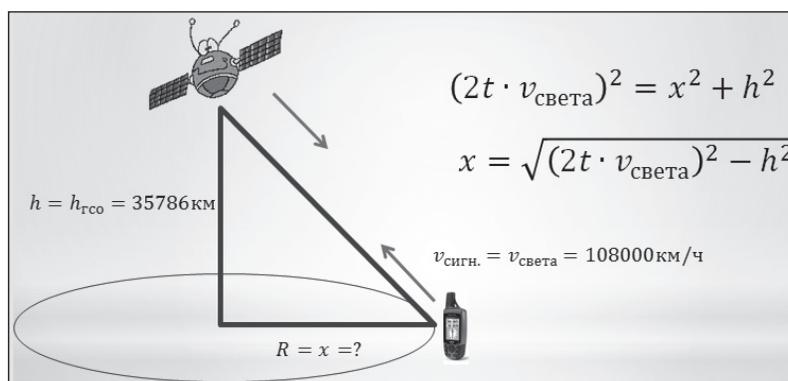


Рис. 2. Формула расчета расстояния от GPS-навигатора до места, над которым находится спутник

В ходе их обсуждения учащиеся приходят к мысли о необходимости для проверки и уточнения гипотез исследовать взаимное расположение двух и трех окружностей методом компьютерного эксперимента.

**Третий этап «Планирование и моделирование компьютерного эксперимента»** состоит в обсуждении ситуаций взаимного расположения окружностей, которые могут или не могут представлять собой модель результата определения геопозиции GPS-навигатора с помощью двух и трех спутников.

**Четвертый этап «Сбор данных»** состоит в сборе данных о значимых для исследования вариантах

расположения двух и трех окружностей. В результате учащиеся устанавливают, что двух спутников достаточно, если окружности касаются внешним или внутренним образом (рис. 3 а, б). Отклик от третьего спутника нужен только, если эти окружности пересекаются (рис. 3 в).

Для случая пересечения первых двух окружностей составляется классификация возможных вариантов расположения третьей окружности, фиксирующей расстояние от местоположения третьего спутника (рис. 4).

Из рисунка 4 видно, что классификация ситуаций, полученных учащимися, не является полной.

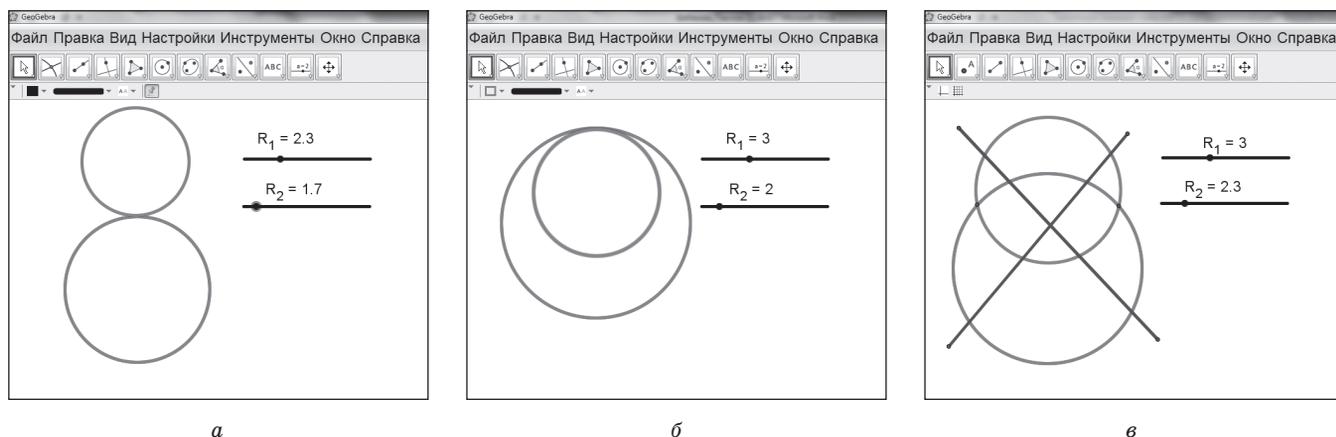


Рис. 3. Результаты первого этапа компьютерного эксперимента

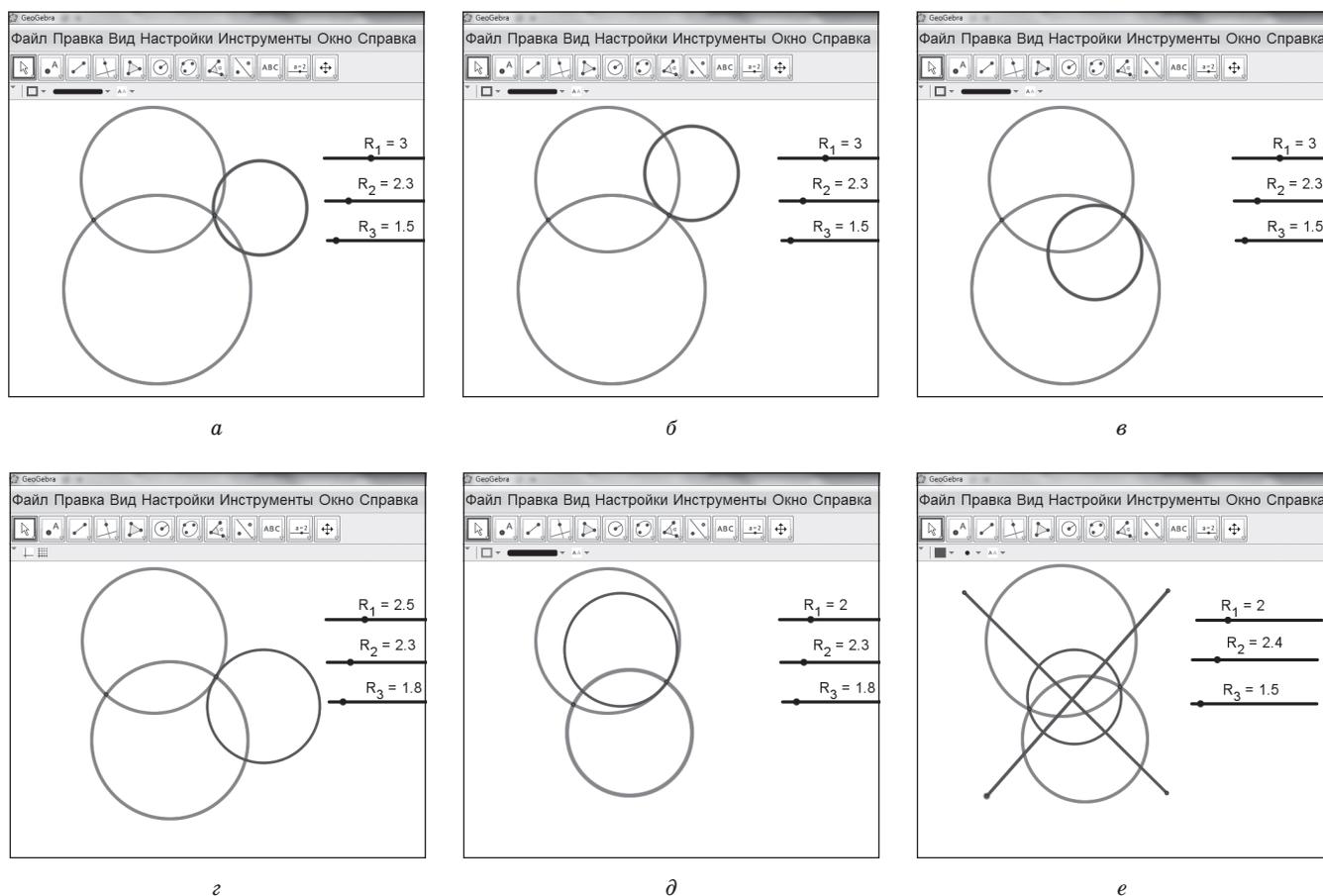


Рис. 4. Результаты второго этапа компьютерного эксперимента

На данном этапе это критике не подвергается. Важно, что среди представленных ситуаций есть та, при которой откликов от трех спутников недостаточно. Обнаружение хотя бы одной такой ситуации специально стимулируется учителем в ходе индивидуальной эвристической беседы.

На пятом этапе «Анализ данных» учащимся предлагается придумать признаки для распознавания особых ситуаций (избыточность или недостаточность откликов от двух и трех спутников), в результате которых они получают формулы:

$$O_1O_2 = R_1 \pm R_2$$

(когда двух спутников недостаточно),

где  $O_1, O_2, R_1, R_2$  — центры и радиусы двух окружностей соответственно;

$$AB = \frac{\sqrt{R_2^2 d^2 - (d^2 - R_1^2 + R_2^2)}}{d}$$

(когда трех спутников недостаточно),

где  $AB$  — общая хорда первых двух окружностей радиусов  $R_1, R_2$ ;  $d$  — расстояние между центрами двух окружностей, равное длине диаметра третьей окружности.

На шестом этапе «Использование результатов компьютерного эксперимента для решения задачи» учащиеся используют все полученные знания для определения местоположения клада в компьютерной игре GeoCaching и изменения его положения (рис. 5).

Последний, седьмой этап «Развитие идеи решенной задачи» имеет целью представить учащимся направления для продолжения работы над задачей. В представленном случае на этом этапе целесообразно показать учащимся, что найденный

ими случай, когда трех спутников недостаточно, не является единственным (рис. 6). В результате возникает более общая задача поиска обобщенного признака распознавания ситуации, когда недостаточно трех спутников.

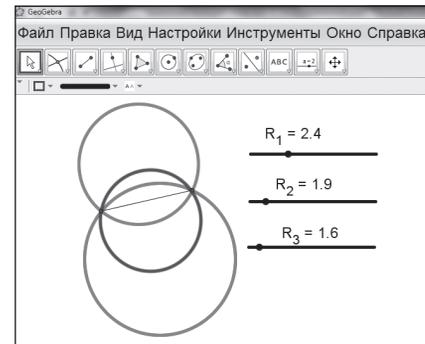


Рис. 6. Ситуация, когда трех спутников недостаточно

Сходным образом данный цикл реализуется на каждом занятии кружка. Последний этап очень важен, так как именно он ориентирует учащихся в выборе темы индивидуального исследования.

Рассмотрим несколько примеров исследовательских работ учащихся, подготовленных в рамках одного из направлений развития идеи задач кружка.

**Пример 1.**

Задача, предложенная учащимся на занятии кружка:

«Хижина Робинзонов». На необитаемый остров, имеющий форму правильного треугольника, каждая сторона которого представляет собой пляж, попали

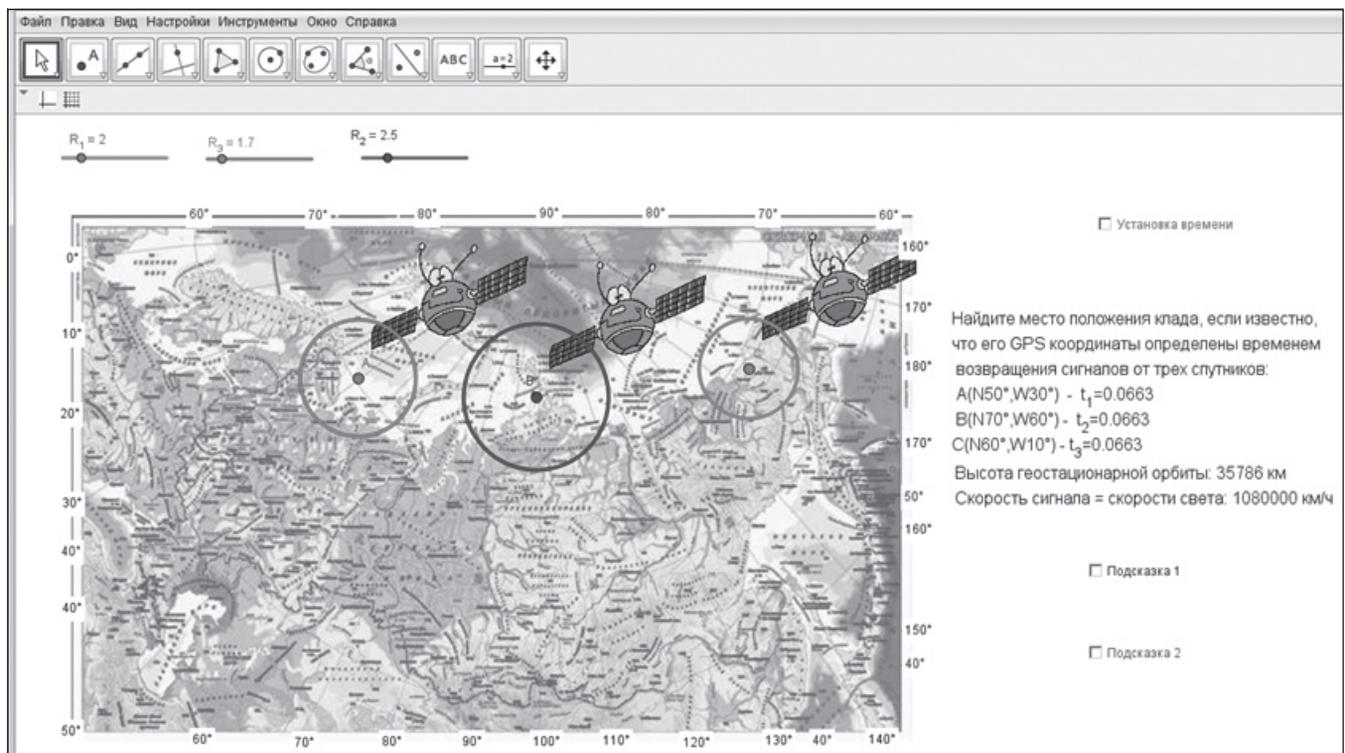


Рис. 5. Динамический лист с заданием отыскать клад

двое. Питер хочет построить хижину так, чтобы суммарное расстояние до всех трех пляжей было минимально. Майкл проводит все время на мысах (в вершинах треугольника) в ожидании спасительного корабля. Он хочет построить хижину так, чтобы суммарное расстояние до мысов было минимально. Где каждому из них нужно построить хижину?

*Результаты занятия.*

Доказано, что геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до сторон правильного треугольника наименьшая (место для строительства хижины Питера), является сам треугольник. Доказано, что центр этого треугольника — единственная точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая (место для строительства хижины Майкла). Кроме того, обнаружено, что для треугольников других видов эти выводы неверны. Было предложено исследовать, как зависит вид геометрических мест точек от параметров, задающих треугольник (например, длин двух сторон и угла между ними).

В процессе реализации этого направления учащимся подготовлена *исследовательская работа на тему «От исследовательского сюжета к стреле задач»*.

Проведение компьютерного эксперимента позволило учащемуся выявить контрольные значения сочетаний параметров, т. е. найти сочетания, в которых или при переходе через которые меняется вид геометрического места точек. Было обнаружено, что для задачи Питера значимым является лишь величина наибольшего угла треугольника и контрольное его значение —  $120^\circ$ . Для задачи Майкла в равнобедренном треугольнике значимым значением параметра является величина угла при его вершине с контрольным значением —  $60^\circ$ ; в разностороннем треугольнике геометрическое место — вершина наибольшего угла. На основе историко-научной информации проведена оценка новизны выдвинутых гипотез. Раскрыта связь исследуемых вопросов с теоремой Вивиани, точками Торричелли и Ферма. Не связанные с этими фактами случаи сформулированы и решены как самостоятельные задачи.

**Пример 2.**

Задача, предложенная учащимся на занятии кружка:

«*Загадка японского храма*». В Японии в эпоху Эдо была традиция вывешивать в храмах математические таблички, названные «сангаку». Они содержали математические факты, которые были представлены с помощью текста, сопровождающего иллюстрацией. На рисунке 7 представлена сангаку, которая была вывешена в 1879 году в храме Ага. Несмотря на реставрацию, текст задачи, написанный на японском языке, плохо читается, а рисунки нечетки. Можно ли по имеющимся данным узнать или хотя бы предположить, в чем состояла задача? Если да, то как?

*Результаты занятия.*

Построена динамическая модель первой геометрической конструкции, представленной на сангаку. С помощью компьютерного эксперимента установлено, что эта конструкция обладает интересным свойством: отношение длин катетов равно отношению радиусов вписанных в треугольники окружностей. Этот факт, представленный в форме задачи на доказательство, предположительно мог составлять содержание задачи. Эта задача была учащимися решена. В конце занятия было показано, что эта конструкция обладает и другими интересными свойствами, которые могли быть представлены задачей. Учитель предложил учащимся поискать эти свойства или постараться реконструировать другие задачи этой сангаку в качестве самостоятельной работы.

В процессе реализации второго из предложенных направлений была подготовлена *исследовательская работа на тему «Воссоздание сангаку храма Ага»*. Результаты этой работы представлены на рисунке 8.

**Пример 3.**

Задача, предложенная учащимся на занятии кружка:

«*Где построить аэропорт?*» Мэры четырех городов подписали соглашение о строительстве общего аэропорта. Каково должно быть расположение аэропорта, чтобы он мог обслуживать города наилучшим образом? Зависит ли выбор места строительства аэропорта от взаимного расположения городов?



Рис. 7. Сангаку, которая была вывешена в 1879 году в храме Ага

Показки, что высота трапеции выражается по формуле: $h = \frac{1}{2} a l b a \cdot \frac{2(a-b) \cos \alpha - 1}{2(a+b) \cos \alpha + 1}$ , а основание: $a$ — угол при основании.	Показки, что $r = \frac{ab}{2(a^2 + b^2)}$ , а $a$ и $b$ — стороны прямоугольника	Показки, что диаметр окружности равен стороне квадрата, при соотношении катетов примерно 0,95	Показки, что сторона квадрата равна $\frac{2R}{1+\sqrt{2}}$	Показки, что площадь большого треугольника будет равна площади параллелограмма, если вершина параллелограмма делит катет в отношении 2:1.	Показки, что площади треугольников равны если нижняя сторона разделена точкой в отношении 1:2.	Показки, что стороны квадрата пропорциональны катетам треугольника	Показки, что $r = \frac{2R(\sqrt{2}-1)}{2(a+b)}$	Показки, что боковая сторона равнобедренного треугольника составляет $\frac{5}{6}$ его основания	Показки, что $r = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$	Показки, что точка касания срединки окружностей находится от центра большей окружности на расстоянии $\sqrt{7}R$ , где $r$ — радиус меньшей окружности, $R$ — радиус большей окружности	Показки, что если катеты треугольника относятся как 1:2, то радиусы касающихся их окружностей примерно относятся как 2:1.		
Показки, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{r_2}$													

Рис. 8. Реконструкция (на уровне стилизации) сангаку храма Ага

**Результаты занятия.**

Вопрос о выборе места для строительства аэропорта сведен к вопросу о поиске точки, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника наименьшая. С помощью компьютерного эксперимента выдвинуты гипотезы о том, что в любом выпуклом четырехугольнике такой точкой является точка пересечения его диагоналей; в невыпуклом четырехугольнике — вершина наибольшего угла. Эти гипотезы доказаны.

В ходе обсуждения результатов поставлены новые исследовательские вопросы:

- Зависит ли расположение аэропорта от соотношения населения этих городов?
- Как определять место строительства аэропорта, предназначенного для обслуживания большого количества городов?

Результатом поиска ответа на первый из поставленных вопросов явилась работа на тему «Решение математических задач методом взвешивания». Автор работы:

- свел вопрос к поиску положения центра тяжести системы четырех материальных точек, в которых сосредоточены массы, пропорциональные населению городов;
- решил полученную задачу двумя методами: методом взвешивания (экспериментально) и барицентрическим методом (теоретически);
- исследовал область и условия применимости этих методов в решении задач элементарной геометрии.

**3. Сетевая игра «Геометрический Scrabble в облаках»**

Идея данного педагогического сценария возникла под влиянием запроса оргкомитета международного конкурса «Математика и проектирование» [5]. Отметим десятилетний юбилей конкурса в оргкомитете

те решили введением новой номинации «Сетевые международные проекты». Сформировать международную проектную группу оказалось довольно легко. В нее вошли трое учащихся X класса областной специализированной школы-интерната для одаренных детей с углубленным изучением различных предметов города Актау, Казахстан; трое учащихся XI класса гуманитарной гимназии города Ловеч, Болгария, и такое же количество учащихся IX класса средней общеобразовательной школы № 8 города Архангельска. Главная проблема состояла в организации продуктивного взаимодействия участников проекта, проживающих в разных странах и имеющих разный уровень математической подготовки. Для решения этой проблемы была создана сетевая игра «Геометрический Scrabble в облаках».

В качестве облачного ресурса, доступного для участников всех стран, сразу был выбран Google Диск. Исключительным его достоинством является наличие облачной версии GeoGebra в качестве приложения. Сегодня игра завершена, и использованный для нее ресурс выглядит следующим образом (рис. 9).

Правила этой игры являются производными от правил игры Scrabble (более известной в России как игра «Эрудит»). Координатор игры ставит в центральную клетку игрового поля, созданного с использованием облачной версии программы Excel — Google Таблицы, исходную задачу. В качестве стартовой была использована следующая задача:

«Отрезок  $AB$  разделен произвольной точкой  $C$  на две части (рис. 10). На каждой из этих частей как на стороне построены правильные треугольники  $AMC$  и  $CNB$ , лежащие в одной полуплоскости. Найдите, какую траекторию при перемещении точки  $C$  по отрезку  $AB$  опишет точка  $T$  — точка пересечения биссектрисы угла  $MCN$  с отрезком  $MN$ ».

Выбор задачи определялся двумя соображениями: богатством возможностей для развития сюжета задачи в разных направлениях (изменение способа задания точки  $T$ , вида построенных на отрезке

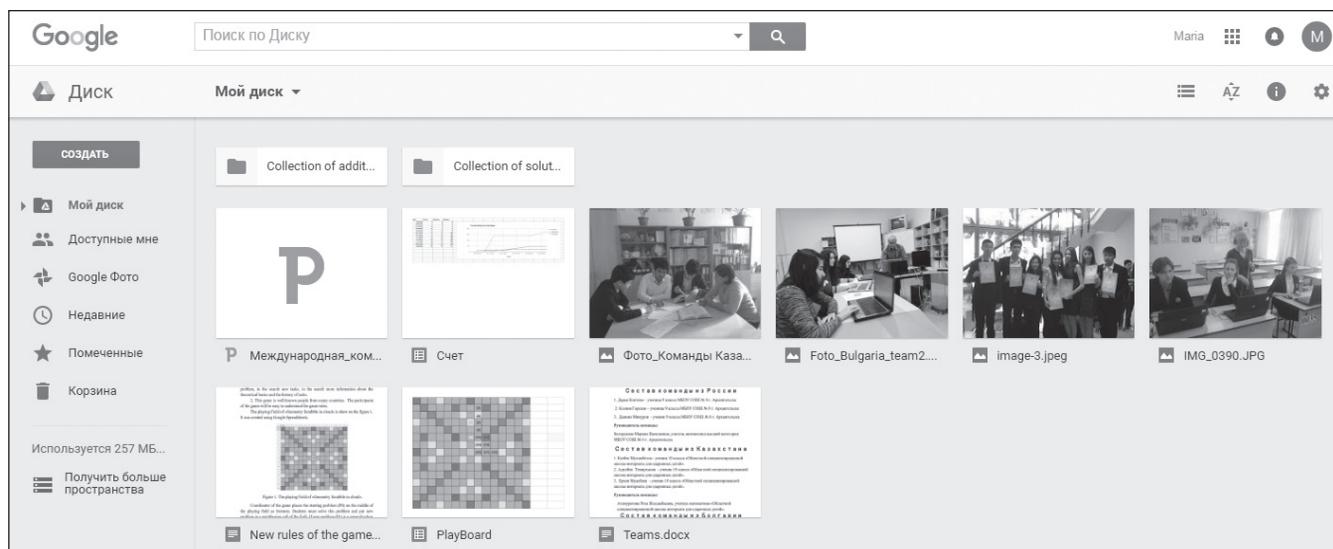


Рис. 9. Облачный ресурс игры «Геометрический Scrabble в облаках»

многоугольников, области изменений позиции точки  $C$ ) и возможностью привлечения компьютерного эксперимента к решению задачи.

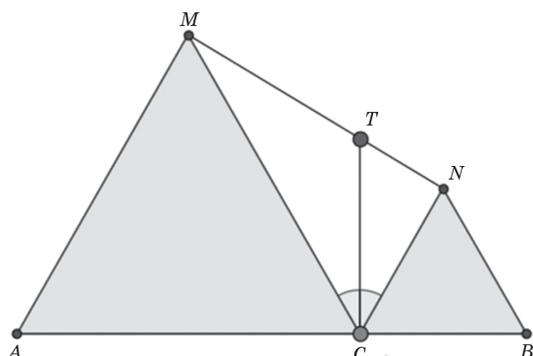


Рис. 10. Стартовая задача (P0)

Участники из Болгарии, Казахстана и России, объединенные в три команды, должны были решить задачу и поставить на ее основе новую. Характер связи новой задачи со стартовой определял ее позицию на игровом поле:

- если новая задача изменяет геометрическую конструкцию исходной, то она размещается над стартовой;
- если представляет собой обобщение исходной, то справа от нее;
- если состоит в поиске особого частного случая стартовой задачи, то слева;
- если ставит новый вопрос относительно свойств конфигурации, то снизу.

Последующие задачи должны быть связаны указанным образом со всеми ранее поставленными. За постановку задачи, ее аналитическое или компьютерное решение, предъявление дополнительной информации историко-научного или прикладного характера команды получали баллы. Цвет поля, на котором размещена задача, как и в игре Scrabble, имел свое значение. Правила игры, состав команд, состояние игрового поля, текущий счет, поставленные задачи и решения, дополнительные

материалы — все находило отражение в облачном ресурсе.

В результате участники сетевого проекта смогли составить и решить 17 задач (рис. 11).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2								P13	P17						
3								P6	P12						
4								P4	P9						
5								P3	P10						
6								P2	P8	P14					
7								P1	P11	P16					
8								P0	P6	P7	P15				
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															

Рис. 11. Состояние игрового поля в конце игрового периода

Расположение задач показывает, что творчество учащихся было направлено на поиск новых модификаций исходной геометрической конфигурации, а также обобщений уже решенных задач. Наибольшее количество последовательных обобщений получила стартовая задача, было рассмотрено шесть модификаций описанной в ней геометрической конструкции. Представленные учащимися решения показывают, что интерактивную творческую среду в своих исследованиях учащиеся использовали достаточно широко: для проверки корректности постановки задач, выдвижения гипотезы о виде геометрического места точек, для поиска способа аналитического решения задачи и проверки правильности (рис. 12, 13).

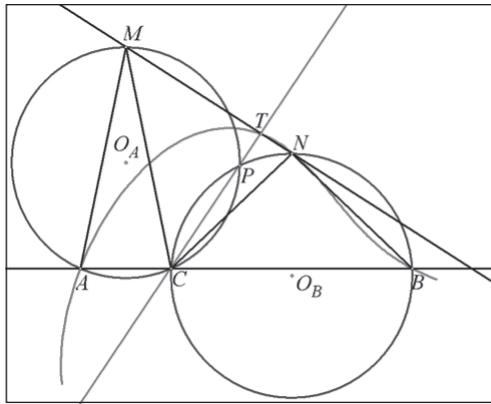


Рис. 12. Поисковый эксперимент задачи P10

P10. Отрезок  $AB$  разделен произвольной точкой  $C$  на две части. На каждой из этих частей как на стороне построены равнобедренные треугольники  $AMC$  и  $CNB$ , лежащие в одной полуплоскости и с углами при основаниях  $AC$  и  $CB$  соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Если  $P$  — вторая точка пересечений описанных около треугольников  $AMC$  и  $CNB$  окружностей, найдите, какую траекторию при перемещении точки  $C$  по отрезку  $AB$  опишет точка  $T$ , которая получается при пересечении прямых  $CP$  и  $MN$ .

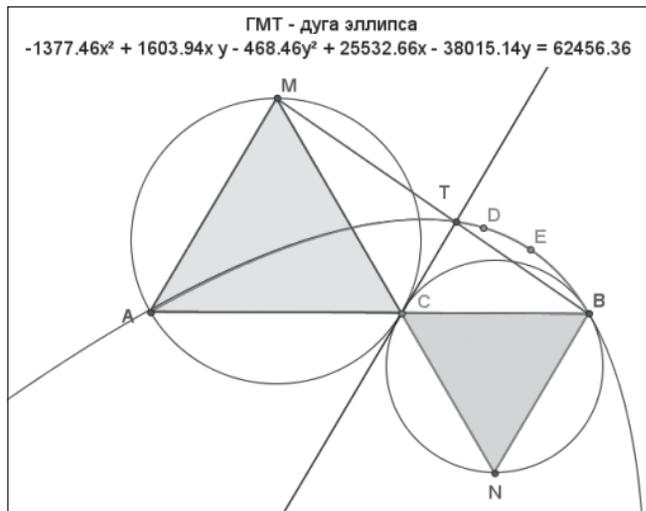


Рис. 13. Контрольный эксперимент задачи P13

P13. Отрезок  $AB$  разделен произвольной точкой  $C$  на две части. На каждой из этих частей как на стороне построены правильные треугольники  $AMC$  и  $CNB$ , лежащие в разных полуплоскостях. Окружности, описанные около этих треугольников, касаются внешним образом в точке  $S$ . Найдите, какие траектории при перемещении точки  $C$  по отрезку  $AB$  опишет точка  $T$  — точка пересечения отрезка  $MS$  с касательной к окружностям, проходящей через точку  $T$ .

Для презентации результатов исследования учащиеся разных стран объединились в одну команду, придумав ей поэтическое название «Огни святого Эльма». Неожиданным как для самих учащихся, так и для руководителей команд стало предложение членов жюри конкурса опубликовать результаты исследования в научном издании Болгарской академии наук. Вдохновленные успехами ученики решили продолжать совместную работу и дальше. Это можно сделать несколькими способами: продолжить развивать идею данной задачи, исследовать свойства полученных ими кривых или начать игру заново с новой стартовой задачи.

#### 4. Турнир по экспериментальной математике

Учредителем турнира по экспериментальной математике является САФУ имени М. В. Ломоносова. Турнир задумывался как массовый конкурс, с одной стороны, способствующий популяризации экспериментального подхода в математике и интерактивных творческих сред, а с другой — представляющий собой форму мониторинга уровня сформированности у учащихся качеств математика-экспериментатора, описанных нами в [11]: готовности критически оценивать результаты эксперимента, умения планировать эксперимент, применять различные методы экспериментальных исследований, создавать динамические модели, адекватные объекту исследования и целям эксперимента, сочетать экспериментальный подход с теоретическим при решении задач. Задачи, предлагавшиеся учащимся на соревнованиях, прошедших в 2015 и 2016 годах, размещены на официальном сайте турнира [6], сопровождаются решениями и критериями оценки. В связи с этим мы здесь их приводить не будем. Покажем лишь несколько примеров турнирных задач, которые, на наш взгляд, заслуживают особого внимания.

**Задание 1** (задача на 8 баллов, VIII класс, 2016 год).

Сформулируйте теорему, для проверки которой был организован представленный на рисунке 14 компьютерный эксперимент. Докажите, что полученные данные противоречат сами себе. Объясните, как могло возникнуть это противоречие.

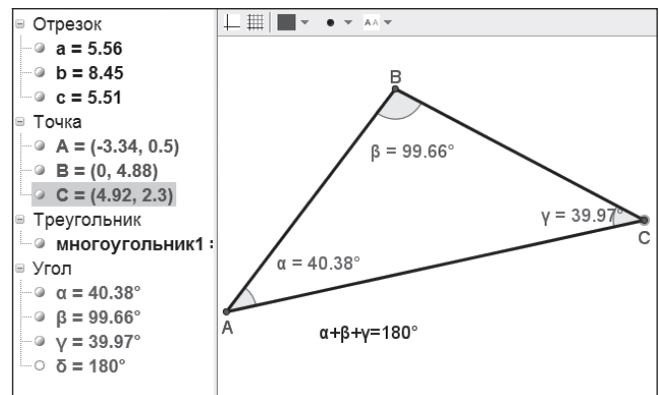


Рис. 14. Аномальный результат компьютерного эксперимента

#### Обсуждение.

Данное задание было призвано продемонстрировать учащимся, что даже компьютерный эксперимент имеет «выбросы» — аномальные результаты, которые могут привести к неверным выводам, если их не подвергать теоретическому осмыслению и обоснованию. Это задание проверяет готовность учащихся подмечать такие аномалии и давать им адекватное объяснение.

**Задание 2** (задача на 30 баллов, VII класс, 2015 год).

Даны две точки  $A$  и  $B$ . Экспериментально установите вид фигуры, образованной основаниями

перпендикуляров, которые опущены из точки  $A$  на всевозможные прямые, проходящие через точку  $B$ . Обоснуйте правильность выводов, сделанных на основе эксперимента.

*Обсуждение.*

Особенностью данного задания является наличие прямого требования использовать сочетание экспериментального подхода с теоретическим. Проведение несложного эксперимента в интерактивной творческой среде позволяло установить, что искомое геометрическое место точек — окружность (рис. 15).

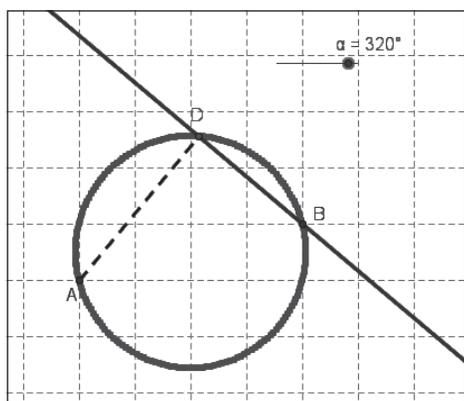


Рис. 15. Результат компьютерного эксперимента

Однако теоретическое обоснование этого результата требовало от учащихся VII класса доказательства двух взаимообратных утверждений — «Если  $D$  лежит на окружности, то угол при вершине  $D$  — прямой» и «Если угол  $D$  — прямой, то  $D$  — точка окружности с диаметром  $AB$ » — на основе имеющихся в их распоряжении знаний геометрии.

Наиболее интересной из задач, предлагавшихся на турнире 2015 году, являлась серия, названная нами «Снежный ком конструктивных задач» (задачи на 20 баллов). Приведем пример одной из таких серий.

**Задание 3.**

Уберите с панели инструментов GeoGebra все конструктивные инструменты, кроме *Точка на объекте*, *Пересечение*, *Отрезок*, *Луч*, *Окружность по центру и точке* (рис. 16).

3.1. С помощью оставшихся инструментов постройте:

- 1) отрезок  $AB$ ;
- 2) окружность с центром  $A$  и радиусом  $AB$ ;
- 3) правильный треугольник со стороной  $AB$ .

3.2. Создайте новый инструмент — *Правильный треугольник*, добавьте его в панель инструментов вместо инструмента *Окружность по центру и радиусу*. С помощью нового набора инструментов постройте:

- 1) произвольный отрезок  $AB$ ;
- 2) точку  $M$  — середину  $AB$ ;
- 3) проведите серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ .

3.3. Выведите в дополнение к имеющимся конструктивным инструментам на панель инструменты

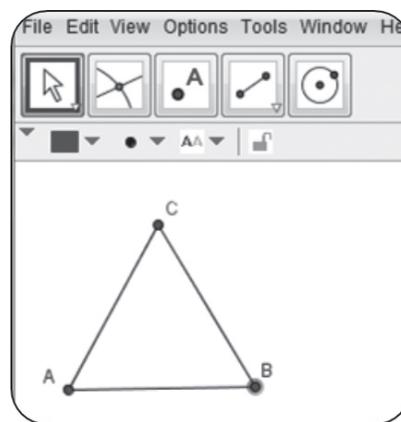


Рис. 16. Панель с wybranymi инструментами

*Середина отрезка и Серединный перпендикуляр.* Отметьте две произвольные точки  $M$  и  $B$ . С помощью обновленной панели инструментов постройте:

- 1) отрезок  $AB$  по одному из его концов (точке  $B$ ) и середине (точке  $M$ );
- 2) постройте произвольную прямую  $KN$  и отметьте на ней точку  $C$ ;
- 3) постройте перпендикуляр к прямой  $KN$ , проходящий через  $C$ .

3.4. Создайте новый инструмент — *Перпендикуляр к прямой через точку, лежащую на этой прямой*. Проведите произвольную прямую  $AB$ , отметьте точку  $C$ , не лежащую на  $AB$ . Затем постройте перпендикуляр к  $AB$ , проходящий через точку  $C$ .

По мере продвижения уровень сложности задач нарастал. Для того чтобы можно было представить уровень сложности завершающей задачи этой серии, покажем результаты построения (рис. 17).

Представленная здесь серия носит демонстрационный характер, поэтому в действительности в задании турнира были включены другие аналогичные

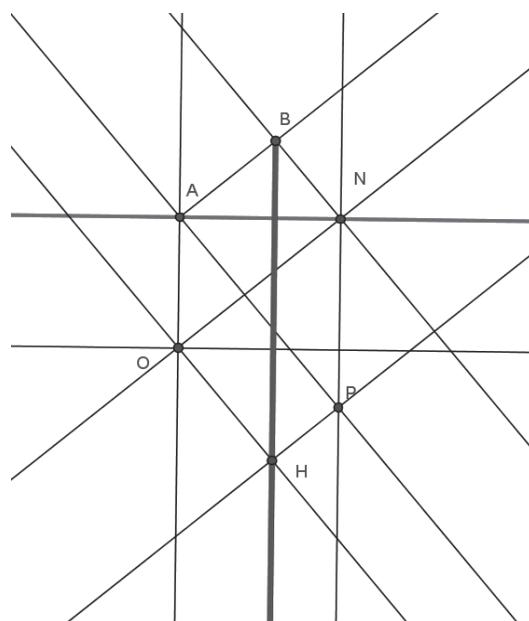


Рис. 17. Результат решения задачи 3.4

серии. С первыми задачами справились практически все участники турнира, даже те, кто не имел навыков работы в интерактивной творческой среде (учащиеся имели возможность пользоваться инструкциями по управлению панелью инструментов и созданию нового инструмента). Трудности начали возникать тогда, когда набор инструментов стал в значительной степени отличаться по своим возможностям от привычных учащимся циркуля и линейки. Несмотря на это, именно данное задание понравилось и запомнилось большинству участников турнира.

В заключение обсуждения данного сценария следует отметить, что набор предлагаемых на этом турнире задач не ограничивается задачами на использование компьютерных инструментов. Среди них есть и задачи на разрезание, перегибание листа бумаги, взвешивание, мысленное экспериментирование и т. п. Умение применять подручные средства и экспериментировать с вещественными интерпретациями математических объектов — важная составляющая качества математика-экспериментатора, о которой не стоит забывать.

## 5. Заключительные соображения

Накопленный всеми участниками проекта МІТЕ опыт, а также результаты обследования достаточно большого количества учащихся (более 800) в течение пяти лет позволяют нам утверждать, что интерактивные творческие среды, оправдывая свое название, предоставляют много возможностей для творчества учащихся и развития их математических способностей. Использование программных продуктов этого класса для поддержки обучения математике позволяет снять у учащихся страх перед неудачами, сделать процесс обучения математике увлекательным и интересным, делает реальным для учащихся

получение уже сейчас, а не в отдаленном будущем собственных математических результатов, достойных находиться на одних страницах с результатами умудренных опытом исследователей.

## Литературные и интернет-источники

1. Дворянинов С. Приключения Буратино // Квант. 2014. № 2.
2. Геокэшинг. <http://www.geocaching.su/>
3. Иванов С. Г., Рыжик В. И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика»: пособие для учителей общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013.
4. Кружок по экспериментальной математике. <http://itprojects.narfu.ru/kruzhok-exp-mat/>
5. Международный конкурс «Математика и проектирование» // АСОУ. <http://new.asou-mo.ru/index.php/2015-11-30-08-14-02/2015-11-30-08-31-47>
6. Турнир по экспериментальной математике среди школьников 7–9 классов. <http://itprojects.narfu.ru/turnir/index.php>
7. Christou C., Mousoulides N., Pittalis M., Pitta-Pantazi D. Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry Environment // The Montana Mathematics Enthusiast (TMME). 2005. September. (Vol. 2. No. 2). <http://www.math.umd.edu/tmme/vol2no2/tmmev2n2a5.pdf>
8. Georgiev V., Mushkarov O. Around Napoleon's Theorem, the project of the DynaMAT Materials. [http://www.dynamat.v3d.sk/upload\\_pdf/20121022\\_152815\\_0.pdf](http://www.dynamat.v3d.sk/upload_pdf/20121022_152815_0.pdf)
9. Hreinsdyttir F. Euclidean Eggs, the project of the DynaMAT Materials. [http://www.dynamat.v3d.sk/upload\\_pdf/20121022\\_154322\\_0.pdf](http://www.dynamat.v3d.sk/upload_pdf/20121022_154322_0.pdf)
10. Ulovec A. GeoCaching — how to find it ... using satellites, the project of the DynaMAT Materials. [http://www.dynamat.v3d.sk/upload\\_pdf/20121022\\_162026\\_0.pdf](http://www.dynamat.v3d.sk/upload_pdf/20121022_162026_0.pdf)
11. Yastrebov A., Shabanova M. Education of a Mathematician-Experimentalist, or Soft Manifesto of Experimental Mathematics // Mathematics and Informatics: Bulgarian Journal of Educational Research and Practice. Sofia, 2015.

## НОВОСТИ

### Итоги XXVIII Международной олимпиады по информатике

XXVIII Международная олимпиада по информатике среди школьников (IOI-2016) проходила в столице Татарстана Казани с 12 по 19 августа 2016 года. В состязании приняли участие 314 человек из 81 страны мира.

Командное «золото» завоевали юные программисты из Китая, «бронза» досталась старшекласникам из Ирана.

Россию на олимпиаде представляли две команды. Участники основной команды показали отличный результат — сборная стала второй в командном зачете и получила «серебро» олимпиады. В личном зачете ее участники завоевали четыре медали следующего достоинства:

- Владислав Макеев, Москва — золото;
- Михаил Путилин, Новосибирская область — золото;

- Григорий Резников, Москва — золото;
- Станислав Наумов, Челябинская область — серебро.

Школьники из второй команды также не остались без медалей:

- Михаил Анопенко, Санкт-Петербург — серебро;
- Александра Дроздова, Нижегородская область — серебро;
- Денис Солонков, Московская область — серебро;
- Асхат Сахабиев, Республика Татарстан — бронза.

Поздравляем ребят и их руководителей с успешным завершением олимпиады!

(По материалам портала [olimpiada.ru](http://olimpiada.ru) — Олимпиады для школьников)