

В. Н. Дубровский,

*Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А. Н. Колмогорова
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (СУНЦ МГУ)*

«1C:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР» И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ В СУНЦ МГУ

Аннотация

Несмотря на существенно выросшую популярность среди учителей программ динамической геометрии, примеров их использования в школах на регулярной основе все еще немного. В статье обсуждается один из таких примеров — математический практикум в СУНЦ МГУ, проводимый с помощью среды «1C:Математический конструктор».

Ключевые слова: практикум, динамическая геометрия, «1C:Математический конструктор».

За последние 10–15 лет доля участников учебного процесса, знакомых с программами динамической геометрии, или интерактивными математическими системами (ИМС), такими как «Живая Математика», «1C:Математический конструктор» [6] или GeoGebra, увеличилась во много раз, появились обширные коллекции готовых моделей в формате этих программ. Однако реальное применение ИМС на уроках математики, к сожалению, все еще очень ограничено. Конечно, никто не рассчитывает на то, что эти ресурсы и ИКТ вообще смогут одновременно решить современные проблемы образования, в частности, математического, о котором мы здесь говорим. Но и игнорировать тот факт, что компьютер, Интернет, всевозможные гаджеты стали неотъемлемой частью среды, окружающей сегодня ученика и учителя, невозможно, тем более что многие разработки в этой области действительно способны придать новые качества учебному процессу.

Чтобы компьютер использовался на уроках систематически, нужно обеспечить выполнение как минимум двух условий. Первое — техническо-организационное, т. е. наличие необходимого оборудования и программного обеспечения. При этом желательно, чтобы в течение одного урока учитель и ученики могли, не испытывая неудобств, переходить от обычного способа работы к работе с компьютером и обратно. Второе условие — «содержательное»: дополнительные затраты времени на подготовку к урокам и на самих уроках, которые не-

избежно требуются от учителя, желающего активно применять в своей работе компьютерные методики и ресурсы, должны компенсироваться более высокой по сравнению с традиционными средствами учебной эффективностью этих материалов.

Современное техническое оснащение школ, как правило, позволяет использовать на уроках компьютер с проектором, но организовать индивидуальную работу учащихся на компьютерах во время урока, за пока еще редкими исключениями, можно только в компьютерных классах. Поэтому преобладающей формой использования ИМС на уроках оказывается фронтальная работа с классом, при которой сложно привлечь к активной учебной деятельности всех учащихся. Между тем главная ценность ИМС с точки зрения содержания поддерживаемой ими учебной деятельности состоит в том, что они предоставляют пользователю инструментальную для математических экспериментов и исследований, т. е. видов деятельности преимущественно индивидуальных.

Мы расскажем об особой форме работы, развиваемой в Специализированном учебно-научном центре (СУНЦ) МГУ, при которой в индивидуализированную экспериментально-исследовательскую деятельность с использованием ИМС вовлечены все учащиеся.

Вскоре после открытия физико-математической школы-интерната при МГУ (ныне СУНЦ) один из ее создателей, академик Андрей Николаевич Колмогоров, ввел в программу ФМШ новый пред-

Контактная информация

Дубровский Владимир Натанович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Специализированного учебно-научного центра (факультета) — школы-интерната имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (СУНЦ МГУ); адрес: 121357, г. Москва, ул. Кременчугская, д. 11, каф. математики; телефон: (499) 445-40-54; e-mail: dubrovsky@aesc.msu.ru

V. N. Dubrovskiy,

Kolmogorov School of Moscow State University

1C:MATHKIT AND MATH WORKSHOP IN AESC MSU — KOLMOGOROV SCHOOL

Abstract

In spite of the growing popularity of dynamic geometry software among teachers, it is not easy to find examples of actual usage of DGS at school on a regular basis. We discuss one of such examples, the Mathematical Practicum, a special math subject in the Kolmogorov School for gifted students, whose assignments were reworked into the format of 1C:MathKit software.

Keywords: practicum, dynamic geometry, 1C:MathKit.

мет — «Математический практикум» (первое задание практикума было выдано учащимся в 1969 году). В общих чертах практикум устроен так: читается установочная лекция по очередному заданию, затем выдаются листки с теоретическим материалом и варианты заданий в количестве, достаточном для того, чтобы каждый учащийся получил собственный вариант; некоторые задания рассчитаны на выполнение небольшими группами. Задания выполняются в течение двух-трех недель, как правило, во внеурочное время. Результаты выполнения могут обсуждаться на заключительном занятии. Практический характер заданий выражался в том, что в них требовалось произвести вычисления, начертить какие-то графики, диаграммы, чертежи, склеить модели заданных многогранников и т. д. Более подробно познакомиться с математическим практикумом, который на многие годы стал отличительной чертой курса математики в ФМШ при МГУ, с его идеологией, историей и конкретными заданиями можно в статье [1].

К сожалению, со временем по ряду причин организационного и методического характера практикум как отдельный математический предмет в ФМШ прекратил свое существование. Немалую роль в этом сыграло все более широкое распространение персональных компьютеров и соответствующего программного обеспечения, в результате чего многие задания в своей исходной форме потеряли смысл или морально устарели. Так, изначально вычисления надо было проводить вручную, с помощью таблиц или логарифмической линейки, а графики чертить по точкам на миллиметровой бумаге. И хотя такого рода деятельность и в наши дни имеет определенный смысл при изучении математики, нынешний школьник, вооруженный современными компьютерами и другим оборудованием, воспринимает ее как явный анахронизм. Сама идея регулярного выполнения практических работ по математике несколько не утратила актуальности, но нужно было так переформулировать старые задания и придумать новые, чтобы наличие компьютера не «убивало» их, а, наоборот, усиливало их эффективность.

Эта работа была активизирована в последние годы и уже дала свои результаты — математический практикум как отдельный предмет вернулся в учебный план СУНЦ. Программой основой для новых, компьютерных, заданий стал «1С:Математический конструктор». Конечно, эти и аналогичные задания можно выполнять и с помощью других сред динамической математики. В частности, обширная коллекция разнообразных лабораторных работ, многие из которых берут начало в заданиях математического практикума ФМШ, составила ядро учебного пособия [5], где они были реализованы в формате программы «Живая Геометрия».

Особенностями обновленного компьютерно-математического практикума в СУНЦ МГУ, тесно связанными с функционалом ИМС, являются повышение доли конструктивных задач, расширение возможностей для самообучения и самопроверки, экспериментально-исследовательской деятельности. Ниже мы приводим несколько примеров заданий нового практикума. Отметим, что их компьютерная форма упростила работу преподавателя: выполнен-

ные задания высылаются на проверку электронной почтой, а сама проверка проводится путем «шевелевания» исходных данных: достаточно убедиться, что конструкция остается при этом устойчивой. Обычно корректность конструкции сама по себе говорит и о том, что учащийся усвоил сопутствующий теоретический материал; иногда этот материал включается в программу коллоквиума или зачета по соответствующей теме.

Перейдем к примерам. Первые три из них посвящены построениям в пространстве, точнее, на изображениях пространственных фигур — области, в которой динамические модели, как показывает опыт, наиболее охотно используются учителями. Отметим, что некоторые программы динамической геометрии имеют специальную компоненту для создания моделей трехмерных объектов и различных построений на них. Но ценность таких программ при изучении стереометрии в школе спорна: можно ли научиться, например, строить сечения, если за вас это делает компьютер? Мы считаем, что для целей школьного курса вполне достаточны, и даже более полезны построения, выполняемые в «двумерных» программах (см. [4]).

Практикум «Построение сечений».

Развитие пространственного воображения является как одной из главных целей изучения раздела «Стереометрия» курса геометрии, так и основой его успешного освоения. С этой точки зрения тема «Построение сечений» играет в курсе стереометрии важнейшую роль. К сожалению, уделяемое ей в учебных планах время явно недостаточно. Тот факт, что задачи на построение сечений, как, впрочем, и любые задачи на построение, остаются на обочине школьного курса геометрии и как следствие отсутствуют на экзаменах, в частности на ЕГЭ, возможно, объясняется и трудоемкостью их проверки. В данном практикуме сечения строятся на компьютерных моделях многогранников, которые можно вращать вокруг двух осей. Это как раз тот случай, когда проблема проверки практически снимается. Отслеживать все проведенные построения не нужно: если конструкция не разрушается при вращении модели и изменении точек, задающих сечение, в чем можно убедиться за несколько секунд, то можно быть уверенным, что построение правильное. Подчеркнем, что построения здесь проводятся точно так же, как если бы они выполнялись на бумаге, но благодаря возможности смены ракурса учащийся может увидеть, каким пространственным построениям они отвечают, и проконтролировать свои действия.

Практикум представляет собой серию из 10–15 заданий возрастающей сложности, начиная с самых простых, из школьного учебника. В ходе их выполнения ученик должен сам открыть для себя основные приемы построений и научиться ими пользоваться. Впервые такая серия заданий была разработана для электронного издания [5]. Данный практикум позволяет минимизировать отводимое на построение сечений время уроков без потери качества обучения. Он был многократно и с успехом опробован в разных школах и даже в разных странах, в том числе в форме лабораторной работы в классе.

Практикум «Сечения-2».

По истечении некоторого времени после первого практикума на построение сечений для повторения и закрепления дается второй. Он содержит только одно, но гораздо более сложное задание для каждого учащегося, которое также выполняется на вращающейся модели. Ответ к одному из заданий представлен на рисунке 1.

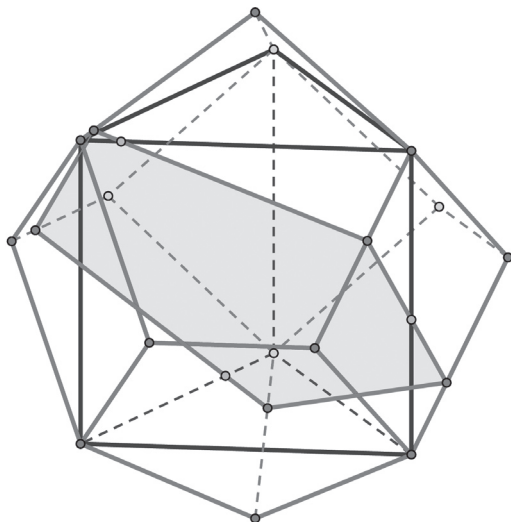


Рис. 1

Формулируется данное задание следующим образом:

«Дано вращающееся изображение треугольной призмы. Через каждое ребро призмы проводится плоскость, параллельная диагонали боковой грани (этим условием плоскости задаются однозначно). Требуется построить изображение выпуклого многогранника, ограниченного этими плоскостями, и сечение этого многогранника плоскостью, проходящей через три точки, данные на ребрах призмы».

Успешное выполнение задания такого типа — надежное свидетельство того, что тема усвоена.

Практикум «Изображения многогранников».

Задания этого практикума формулируются примерно так:

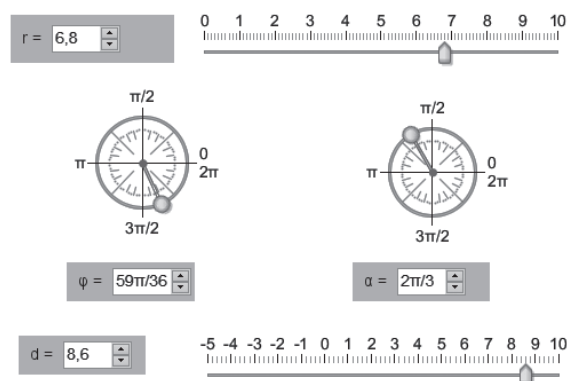
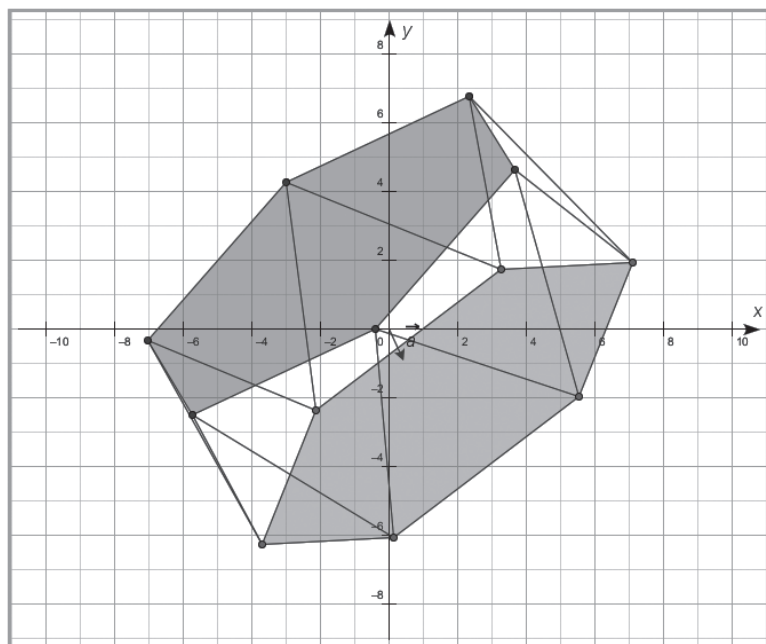
«Дана декартова система координат и определенным образом расположенный относительно нее многогранник (правильный или полуправильный). Требуется построить параллельную и центральную проекции этого многогранника после поворота вокруг заданной оси на заданный угол».

Для выполнения данного практикума требуются знания из большинства разделов стереометрии: о правильных многогранниках, о свойствах проекций, о расстояниях и углах в пространстве, о движениях пространства. На установочной лекции учащимся кратко рассказывается, как задавать повороты с помощью матриц и как вычислять координаты проекций точек.

Результаты выполнения данного практикума приятно удивили. Ученики самостоятельно научились умножать матрицы и разобрались в геометрическом смысле операции умножения, изучили матричный инструментарий «1С:Математического конструктора», а многие «перевыполнили план» и построили динамические модели, в которых можно произвольно изменять направление оси вращения и угол поворота, а также положение центра проекции.

На рисунке 2 показана одна из таких моделей вместе с «ползунками», задающими параметры многогранника, поворотов и изображения.

Описанные три практикума обладают важным качеством: они хорошо адаптируются как к уровню класса, так и к каждому отдельному ученику. Если первый практикум на сечения базируется на стандартных заданиях, наиболее простые из которых входят в программу обычной школы, то второй — это задание на ту же тему, требующее и более развитого



r - длина ребра

φ - это угол между вектором $\mathbf{a}$ и осью OX . По условию он равен $\pi/3$, но здесь его можно менять

α - угол поворота вокруг вектора $\mathbf{a}$

Рис. 2

пространственного воображения, и изобретательности, а третий уже выходит за рамки стандартной программы. В то же время в рамках одного практикума ученик наряду с базовой задачей, программой-минимум получает и более интересные задания повышенной сложности, которые требуют самостоятельного изучения необходимого теоретического материала; эти задания оцениваются отдельно.

Практикум «Восстановление многоугольников».

«Пусть на плоскости был нарисован многоугольник и отмечены середины его сторон. Сотрем многоугольник, оставив лишь отмеченные середины. Можно ли и как восстановить стертый многоугольник?»

Эта известная задача стала одним из источников заданий данного практикума. Другой источник — так называемая **теорема Наполеона**:

«Центры A_1, B_1, C_1 правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону, являются вершинами правильного треугольника» (рис. 3).

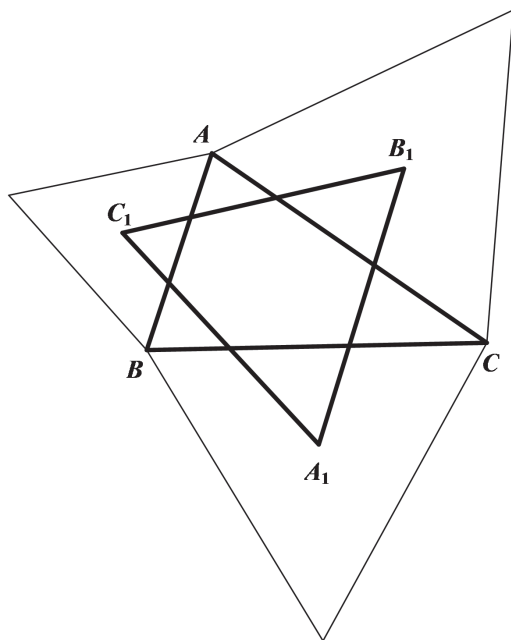


Рис. 3

Теорему Наполеона можно преобразовать в задачу на построение, аналогичную вышеприведенной задаче о серединах сторон:

«Пусть даны три точки A_1, B_1 и C_1 . Требуется восстановить по ним треугольник ABC так, чтобы они оказались центрами правильных треугольников, построенных на его сторонах».

Легко составить множество разнообразных задач этого типа. Например, в «задаче Наполеона» можно считать заданными не центры, а вершины надстроенных правильных треугольников или взять центр одного из них, вершину другого и середину оставшейся стороны треугольника ABC (рис. 4), и т. д. В самом общем случае треугольник ABC нужно восстанавливать по точкам A_1, B_1, C_1 так, чтобы треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 имели заданные

углы. Также можно восстанавливать не только треугольники, но и многоугольники с любым числом сторон (как в задаче о серединах сторон).

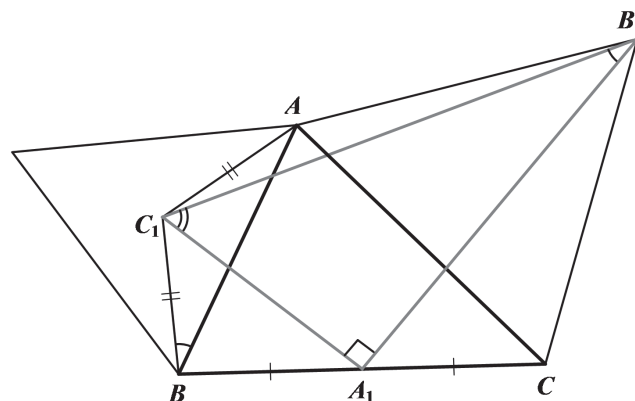


Рис. 4

Поясним математическую суть этих задач.

Если в «задаче Наполеона» (см. рис. 3) последовательно выполнить повороты на 120° против часовой стрелки вокруг точек B_1, A_1 и C_1 , то точка A сначала перейдет в C , затем в B и, наконец, вернется на место, т. е. она является неподвижной точкой композиции этих трех поворотов. Можно доказать, что при любом расположении центров такая композиция есть параллельный перенос, причем он имеет неподвижную точку, т. е. является тождественным преобразованием, тогда, и только тогда, когда центры поворотов образуют правильный треугольник. (Отсюда и вытекает теорема Наполеона.) Поскольку в этом случае любая точка плоскости будет неподвижной точкой композиции, вершину A восстанавливаемого треугольника можно выбирать произвольно, т. е. задача имеет бесконечно много решений. В случае, если точки A_1, B_1 и C_1 должны быть не центрами, а вершинами надстроенных треугольников, нужно рассмотреть композицию поворотов вокруг этих точек на 60° . Эта композиция есть поворот (на 180°), а значит, она имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, в этом случае наша задача имеет единственное решение при любом расположении точек A_1, B_1 и C_1 .

Аналогичным образом рассматриваются и другие задачи этого типа, причем место поворотов могут занимать другие виды преобразований, например, поворотные гомотетии или осевые симметрии. Как и в рассмотренных выше примерах, такие задачи либо имеют единственное решение при любых данных точках, либо, вообще говоря, решений не имеют, но при некоторых особых расположениях данных точек имеют бесконечно много решений. Изучая эти особые расположения во втором случае, можно обнаружить интересные геометрические факты, такие как та же теорема Наполеона.

Каждый вариант практикума «Восстановление многоугольников» состоит из двух заданий — в одном нужно восстановить треугольник, в другом — четырехугольник; кроме того, одно из заданий относится к первому из описанных случаев, а другое — ко второму. Помимо собственно построения требуется провести и исследование разрешимо-

сти и числа решений. В СУНЦ данный практикум проводится в десятом классе в конце изучения темы «Преобразования подобия плоскости» и не только выполняет обучающую функцию, но и является весомой частью зачета по этой теме. Подробный разбор двух относительно простых задач на восстановление многоугольника и методические рекомендации по работе с соответствующими моделями, включенными в коллекцию интерактивных моделей [6], можно найти в [2, 3].

Пользуясь «1С:Математическим конструктором», задания данного практикума можно выполнять на трех уровнях:

- на *экспериментально-исследовательском* уровне с помощью геометрических преобразований, отвечающих способу привязки данных точек к искомому многоугольнику, строится динамическая модель, позволяющая экспериментально выяснить, к какой из указанных выше ситуаций относится данное задание, и найти решение приближенно, «подгонкой»;
- на *конструктивном* уровне выполняется построение, дающее все решения, если они существуют; следует сказать, что в большинстве вариантов возможны построения, не требующие нахождения и исследования композиций преобразований;
- на *теоретическом* уровне дается полное исследование задания (которое сводится к изучению множества неподвижных точек композиции соответствующих преобразований подобия), и построение осуществляется на основе этого исследования.

От учащихся СУНЦ требуется выполнение заданий на втором или третьем уровне проработки. Отдельным бонусом награждаются решения, в которых для второго из описанных выше случаев (с бесконечным числом решений при специальном выборе данных точек) условие существования решения сформулировано и доказано как отдельная теорема (по образцу теоремы Наполеона) и тем самым самостоятельно сделано маленькое математическое открытие. Например, исследование конструкции на рисунке 4 дает такое утверждение: если точки B_1 и C_1 — это вершина и центр правильных треугольников, построенных на двух сторонах произвольного треугольника ABC , а точка A_1 — середина третьей стороны, то треугольник $A_1B_1C_1$ будет прямоугольным с острыми углами 30° и 60° . С этим заданием, требующим более высокого уровня абстракции и математической культуры, справляются немногие. Но заслуживает упоминания достижение ученика СУНЦ Н. Башаева,

который, используя знания, приобретенные при выполнении практикума, нашел новое доказательство так называемой теоремы Наполеона—Барлотти, выражающей условие того, что центры правильных n -угольников, построенных на сторонах данного произвольного n -угольника, сами образуют правильный n -угольник. Планируется публикация этого доказательства в журнале «Квант».

Мы описали лишь некоторые из заданий обновленного компьютерного математического практикума в СУНЦ. За рамками этой статьи остались, в частности, практикумы по алгебре и началам математического анализа, такие как исследование расположения нулей квадратичной функции в зависимости от ее коэффициентов, методы приближенного нахождения корней уравнений и др. Большое число заданий из анналов математического практикума еще ждут своей переработки. Но и рассмотренные примеры, по нашему мнению, свидетельствуют о том, что эта форма работы оптимальна для использования компьютера в преподавании математики в старших классах и особенно на профильном уровне. Такую работу легко организовать, а выполненные задания, как правило, легко проверяются. Практикум может использоваться как для закрепления пройденного материала, так и для самостоятельного изучения нового. Он позволяет индивидуализировать работу с учащимися, открывает широкие возможности для проявления их творческой активности. И, наконец, компьютерный математический практикум нравится ученикам: он получил высокую оценку по результатам их опроса, проводимого в СУНЦ в конце учебного года.

Литература

1. Вавилов В. В. Математический практикум: вчера и сегодня // Математическое образование. 2013. № 3 (67).
2. Дубровский В. Н. По следам исчезнувших многоугольников, или Геометрическая палеонтология // Математика. 2011. № 16.
3. Дубровский В. Н. По следам исчезнувших многоугольников 2. Теорема Наполеона // Математика. 2012. № 1.
4. Дубровский В. Н. Стереометрия с компьютером // Компьютерные инструменты в образовании. 2003. № 6.
5. Дубровский В. Н., Башмаков М. И., Вавилов В. В., Пантуев А. В., Поздняков С. Н. и др. Образовательный комплекс «Математика, 5–11 классы. Практикум. М.: 1С; Учеб.-изд. центр «Интерактивная линия»; ИНТ, 2004.
6. Математика. Коллекция интерактивных моделей. 5–11 классы. Программная среда «1С:Математический конструктор 6.1» (DVD). М.: 1С-Паблишинг, 2015.