

# ЗНАКОМСТВО С ФРАКТАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ В ИНТЕРАКТИВНОЙ ТВОРЧЕСКОЙ СРЕДЕ «1С:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР»

О. М. Корчажкина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук*  
119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

## Аннотация

В статье представлен методический подход к изучению итерационных процессов на примере построения и вычисления характеристик фрактальной кривой «снежинка Коха» в школьном курсе геометрии. Для визуализации метода привлекается интерактивная творческая среда «1С:Математический конструктор». Осуществляя многократно повторяющиеся построения и алгебраические вычисления с помощью средств ИКТ, учащиеся приобретают устойчивый навык оперирования геометрическими объектами различного уровня сложности, постигают возможности математической интерпретации итерационных процессов на практике, а также учатся пониманию диалектического единства конечности площади и бесконечности периметра плоской геометрической фигуры. Знакомство учащихся с подобными противоречивыми понятиями и категориями пополняет опыт мировоззренческого осмысления изучаемых ими предметных областей через понятие «большие идеи», что позволяет с новых позиций взглянуть на процессы, происходящие в окружающем мире. Статья может представлять интерес для школьных учителей информатики и математики, а также вузовских преподавателей курса «Концепции современного естествознания».

**Ключевые слова:** большие идеи, математическое образование, фундаментальное ядро, содержание образования, общее образование, фрактал, снежинка Коха, «1С:Математический конструктор», интерактивная среда, итерационный метод, рекуррентная формула.

**DOI:** 10.32517/0234-0453-2020-35-3-38-48

## Для цитирования:

Корчажкина О. М. Знакомство с фрактальными кривыми в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор» // Информатика и образование. 2020. № 3. С. 38–48.

**Статья поступила в редакцию:** 17 февраля 2020 года.

**Статья принята к печати:** 17 марта 2020 года.

## Сведения об авторе

Корчажкина Ольга Максимовна, канд. тех. наук, ст. научный сотрудник, Институт кибернетики и образовательной информатики, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия; olgakomax@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0020-4914

## 1. Введение

Ключевым протоколом в системе нормативного сопровождения Федеральных государственных образовательных стандартов среднего общего образования и основного общего образования (ФГОС СОО и ОО) является фундаментальное ядро содержания общего образования, инвариантные концептуальные позиции которого включают:

- систему базовых национальных ценностей, приоритеты общественного и личностного развития учащегося;
- систему основных понятий, относящихся к областям знаний, представленным в средней школе;
- систему ключевых задач, обеспечивающих формирование универсальных видов учебной деятельности, адекватных требованиям стандарта к результатам образования.

Обновление фундаментального ядра содержания школьного образования в истории Советского Союза и новой России предпринималось дважды — в 1960-е и 2000-е годы, что диктовалось необходимостью решения одной из базовых проблем современного

этапа развития отечественного среднего образования: законодательно закрепить в едином акте федерального уровня все правовые и нормативные документы, регулирующие организацию и функционирование учреждений образования по их прямому назначению — обучению, воспитанию и развитию ребенка. Кроме того, с практической точки зрения фундаментальному ядру отводится роль основного документа, необходимого для создания базисных учебных планов, программ, учебно-методических материалов и пособий.

Для решения задачи очередного обновления содержания фундаментального ядра — уже в соответствии с новой редакцией ФГОС — в конце мая 2019 года в Москве на базе Института кибернетики и образовательной информатики (ИКОИ) ФИЦ «Информатика и управление» РАН было проведено установочное мероприятие — семинар с международным участием «Наука — фундамент школы XXI века» [1], в котором приняли участие более 150 деятелей сферы образования и науки из России, а также представители различных образовательных сообществ из Казахстана, Вьетнама, Саудовской Аравии и Канады.

В ходе работы семинара был рассмотрен ряд важнейших вопросов, связанных с:

- когнитивными и эмоциональными механизмами учения, персонализацией обучения;
- оптимизацией воздействия образовательного процесса и среды на психо-физиологическое здоровье учащихся;
- эпистемологией и философией образования;
- применением цифровых ресурсов (инструментов, источников, сред и сервисов) в образовании;
- приоритезацией групп образовательных целей, включая предметные, метапредметные и личностные;
- построением фундаментального ядра школьного образования;
- содержанием образования, выраженным в форме измеримых образовательных целей, в соответствии с которыми может быть построена адекватная система примерных программ и государственной итоговой аттестации;
- экспертным сопровождением образования.

Ведущий и председатель программного комитета семинара директор ИКОИ академик РАН и РАО А. Л. Семенов в своих выступлениях обратил особое внимание на выделение «больших идей» школьного образования, которые отражают общее представление о мире, заключенное в наборе фундаментальных понятий, таких как *идея измерения, идея десятичных, или алфавитных, символов, моделирование, имена и объекты, выражение истинности/ложности, визуализация, доказательство, конечные/бесконечные величины* и пр. С одной стороны, было подчеркнуто, что фундаментальное ядро и «большие идеи» необходимо формулировать в компетентностной форме, поскольку именно фундаментальные понятия и конкретные знания являются опорой предметных и метапредметных компетенций. С другой стороны, «большие идеи» не должны преподноситься ребенку в готовом виде: они должны узнаваться им в системе учебных ситуаций и применяться при выполнении заданий, что соответствует современной образовательной парадигме, которая ориентируется на поиск новых подходов к изучению практически всех дисциплин школьной программы.

Что касается предметов естественно-математического цикла и непосредственно математического образования, то в недавнем прошлом программа школьных курсов арифметики, алгебры и геометрии с разной степенью успешности строилась в соответствии с подходами в русле классических дидактических традиций: содержательно-эмпирическим (популярным), формально-эмпирическим, формально-теоретическим (академическим) и содержательно-теоретическим [2, с. 46–54]. Однако в последнее время — в контексте реалий четвертой промышленной революции — все чаще поднимаются вопросы, связанные с новыми способами передачи и усвоения знаний [3], с интеграцией традиционных педагогических и новых информационных технологий, с необходимостью обновления содержания

фундаментального ядра школьного образования, особенно в такой «прорывной» предметной области, как «Математика и информатика».

Еще в 2010 году Н. Х. Розов, ведущий отечественный специалист в области философии образования, профессор механико-математического факультета МГУ, декан факультета педагогического образования МГУ и заведующий кафедрой образовательных технологий, выступая на Международной научной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвященной 105-летию академика С. М. Никольского, выделил несколько направлений развития школьного курса математики вплоть до 2050 года. Он отмечал, что курс информатики «должен быть прагматичен, т. е. учить ориентироваться в жизни, разбираться в нестандартных ситуациях, обеспечивать свою безопасность в самом широком смысле» [4, с. 3]. С этой целью Н. Х. Розов предложил включить в школьный курс математики *три фундаментальных понятия, которые в современной терминологии могут быть названы «большими идеями» перспективного этапа развития математического образования: бифуркация, фрактал и хаос* [4, с. 3–4].

Отметим попутно, что все три названные понятия, будучи воплощенными в математических объектах, необходимо приводят к использованию еще одной «большой идеи» современного образования, тесно связанной с понятиями «бифуркация», «фрактал» и «хаос» и имеющей операциональный характер, — *метода итераций* как инструмента описания бифуркационных процессов, построения фракталов и вычисления их параметров, знакового представления математических систем с хаотическим поведением.

Знакомство учащихся старших классов с «большими идеями», предложенными Н. Х. Розовым десять лет назад, но по-настоящему востребованными только сейчас, целесообразно начать с образа фрактала.

**Изучение фрактала может быть подчинено трем образовательным задачам:**

- 1) *мировоззренческой* — формированию единой картины мира, в которой фракталы воплощают природу всего живого;
- 2) *понятийной* — усвоению диалектического единства между понятиями «конечность»/«бесконечность», что является естественной характеристикой фракталов;
- 3) *метапредметной* — развитию различных способов мышления через овладение процедурами итерационных геометрических построений фракталов и алгебраических вычислений их параметров с использованием рекуррентных формул\*.

Первая задача имеет своей целью формирование общекультурной компетенции учащихся, тогда как две другие направлены на формирование у учащихся информационно-познавательных компетенций.

\* Рекуррентная формула использует выражение каждого следующего члена последовательности через предыдущий.

## 2. Фракталы как образы живой природы и компоненты картины мира

В предисловии к монографии В. В. Тарасенко «Фрактальная логика» С. П. Капица назвал фракталы современным и универсальным ключом для решения практически любых задач, стоящих перед исследователем общества и мира живого, физики бесконечно большого и бесконечно малого [5, с. 5].

Специалисты относят фракталы к математическим аналогам природных форм, принципиально отличающимся от евклидовых геометрических форм типа точки, линии или плоскости [6, с. 38]. Это сильно изрезанный геометрический объект, занимающий промежуточное положение между точкой и линией, между линией и плоскостью, плоскостью и геометрическим телом (рис. 1). То есть фрактал — это нечто среднее между объектом с нулевой размерностью и одномерным объектом, одномерным и двумерным объектом или объектом двумерным и трехмерным. Поэтому говорят, что *фрактал — это геометрический объект с дробной размерностью*. Кроме того, *фрактал обладает свойством самоподобия*, т. е. любой мелкий фрагмент, извлеченный из фрактала, подобен всему фракталу в целом и обладает теми же свойствами. Отсюда *фрактал — это объект с дробной размерностью, получаемый с помощью бесконечной рекуррентной процедуры*.

Образное описание понятия «фрактал» приведено в [7, с. 99]: «Фрактальный объект не дан непосредственно в своей пространственной развертке как евклидова форма, а формируется посредством серии преобразований над неким исходным изображением, причем форма исходного изображения, как правило, не имеет значения. Возникновение посредством таких преобразований некоторого образа, который <...> никогда не достигает полностью завершенной конфигурации, и называют фрактальным ростом».

Итак, основные свойства фрактала формулируются следующим образом:

- фрактал обладает сложной структурой при любом увеличении;
- фрактальная кривая нигде не пересекает саму себя;
- структуру фрактала можно приближенно считать самоподобной;
- фрактал обладает дробной (фрактальной) размерностью, которая больше топологической;
- фракталы строятся с помощью рекуррентных процедур на комплексной плоскости\* (практические иллюстрации см., например, в [9–11]).

Создатель фрактальной геометрии франко-американский математик Бенуа Мандельброт (1924–2010) пришел к этому открытию в ходе естественного использования своего блистательного пространственного воображения для решения алгебраических задач, применяя при этом геометрические объекты. Затем, приспособив понятие «фрактал» к различным сферам человеческой деятельности и превратив его тем самым в некий концепт, Мандельброт «спроецировал» образование понятий через упорядочение объектов познания с помощью фрактальных структур на процесс восприятия внешнего мира. Поэтому помимо естественно-научного чрезвычайно важным является гуманитарное применение понятия «фрактал», которое становится возможным потому, что кроме математической интерпретации фрактал изначально имеет качественное, «инструментальное» содержание, что позволяет

\* Существование фрактальных множеств на комплексной плоскости является принципиальным свойством фракталов, обеспечивающим реализацию их характерных признаков в русле «теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости» [8, с. 133] — самоподобия структуры, дробной размерности и подчинения рекуррентным процедурам.

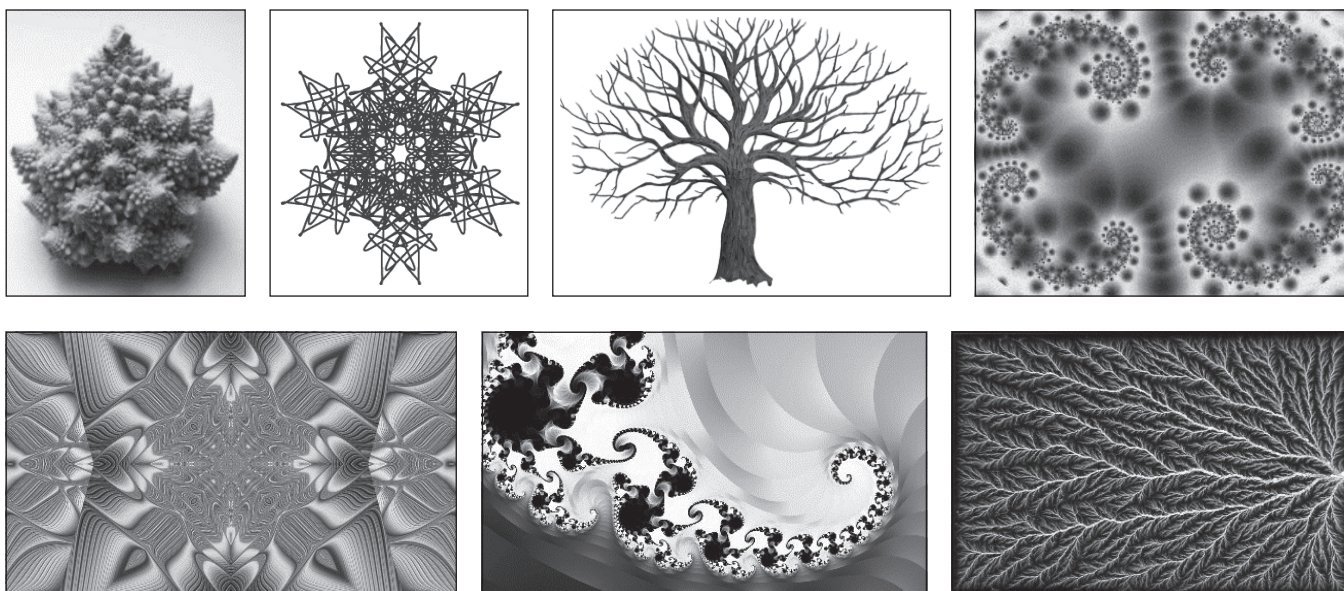


Рис. 1. Примеры фракталов

«исследовать сложные явления в их простейшем воплощении» [12].

В настоящее время наравне со все новыми попытками визуализации объектов фрактальной геометрии [13, 14] появляются публикации по применению теории фракталов в лингвистике и теории познания, например, в области исследования дискурса [15] или возникновения нового знания (обретения смысла) [7]. И, как совершенно справедливо подчеркивается в [13, с. 92], «фрактальная инженерия не только применяется в прикладных науках, но также помогает визуализировать и интерпретировать современные философские концепты, приводя их в формат здравого смысла».

Фрактальная концепция видения мира, озвученная Мандельбротом, «состоит в том, чтобы с помощью языка математики воспроизвести мир таким, каким он дается в непосредственном восприятии <...> Таким образом, иллюзорным выступает не то, как мы видим непосредственно данный объект, а то, как мы корректируем собственное зрение для того, чтобы получить *представление* об этом объекте» [7, с. 93]. Именно фрактальная самоорганизация позволяет обрести гармонию — «фрактальный порядок интерпретируемого мира» [6, с. 48] — там, где, на первый взгляд, она отсутствует. Например, такое свойство фрактала, как дробная размерность, впервые озвученное Мандельбротом [12, с. 30–32], есть не свойство пространства, а характеристика отношения между наблюдаемым и наблюдателем, т. е. между объектом познания и познающим субъектом\*, что ловко проиллюстрировал сам Мандельброт на примере клубка, свернутого из толстой нити [12, с. 35].

Таким образом, в настоящее время наблюдается активное развитие подходов к решению общеметодологических проблем, связанных с фрактальным представлением различных аспектов человеческой деятельности, покрывающих естественно-научные и когнитивные области знаний (см., например, [7, 16–18]):

- фрактальность научных идей;
- фрактальный режим восприятия и описания внешнего мира;
- фрактальность процесса познания и построения баз знаний;
- соотношение процессов индивидуального и исторического развития;
- фрактальные механизмы эволюционных процессов в биологии и пр.

Эти научные направления в ближайшее время будут, несомненно, играть главенствующую роль в формировании обновленной картины мира, к пониманию которой должны готовиться наши учащиеся уже в средней школе.

\* Читаем у Я. И. Свирского: «Дробная размерность <...> при фрактальном подходе ставится во главу угла как условие адекватного восприятия мира» [7, с. 95], у Б. А. Богатых: «В действительности размерность является не столько внутренней характеристикой геометрического объекта <...> сколько своеобразной характеристикой модели наблюдателя, т. е. зависит от связи объекта с внешним миром» [16, с. 80].

### 3. Фракталы как пространство развития информационно-познавательных компетенций учащихся

Очевидно, что подготовка учащихся к восприятию фрактала на уровне мировоззрения как некоего концепта, «кирпичика» живой природы должна начинаться с конкретных объектов, имеющих определенные, часто неочевидные, свойства:

- сильную изрезанность, предполагающую невозможность вычисления производных;
- самоподобную структуру, при любом увеличении сохраняющую свою первоначальную сложность;
- дробную размерность, превышающую топологическую и описываемую с помощью комплексных чисел;
- допускающую копирование, масштабирование и использование итерационных процессов при алгебраических вычислениях характеристик и геометрических построениях.

Эти фрактальные объекты иллюстрируются простейшими фигурами, изображенными на рисунке 2: кривая дракона (*a*), снежинка Коха (*b*), треугольник Серпинского (*в*) и ковер Серпинского (*г*). Для иллюстрации необычных свойств эти фракталы представлены на рисунке 2 при довольно высоком номере итераций *D*, от которого зависит сложность фрактала в целом.

Естественно, исследовать на школьном уровне некоторые характеристики фракталов, такие как недифференцируемость и дробная размерность, весьма затруднительно. Однако выполнить геометрические построения и вычислить некоторые характеристики, например периметр и площадь, с помощью рекуррентных формул на основе итерационных процедур — задача, вполне доступная учащимся старших классов. С одним только допущением: если она будет решаться в пределах предметной области «Математика и информатика», т. е. с *привлечением средств ИКТ*.

Начнем с границ применимости метода итераций к построению фрактальных кривых и вычислению их параметров.

Классический метод итераций в топологическом пространстве — это многократно повторяющийся процесс, демонстрирующий рост точности вычислений с каждым следующим шагом в виде предела последовательности некоторых величин. Пределом последовательности элементов итерационного процесса является точка (или отражающая ее величина) с окрестностью, содержащей все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера итерации *D*. Кроме того, в классическом методе итераций последовательность вычисляемой величины обладает свойством сходимости к некоторому пределу, хотя (и это будет показано на примере ниже) это свойство выполняется не всегда.

Об итерационном характере фрактальных кривых, построение которых невозможно без осуществления итерационных процедур и применения

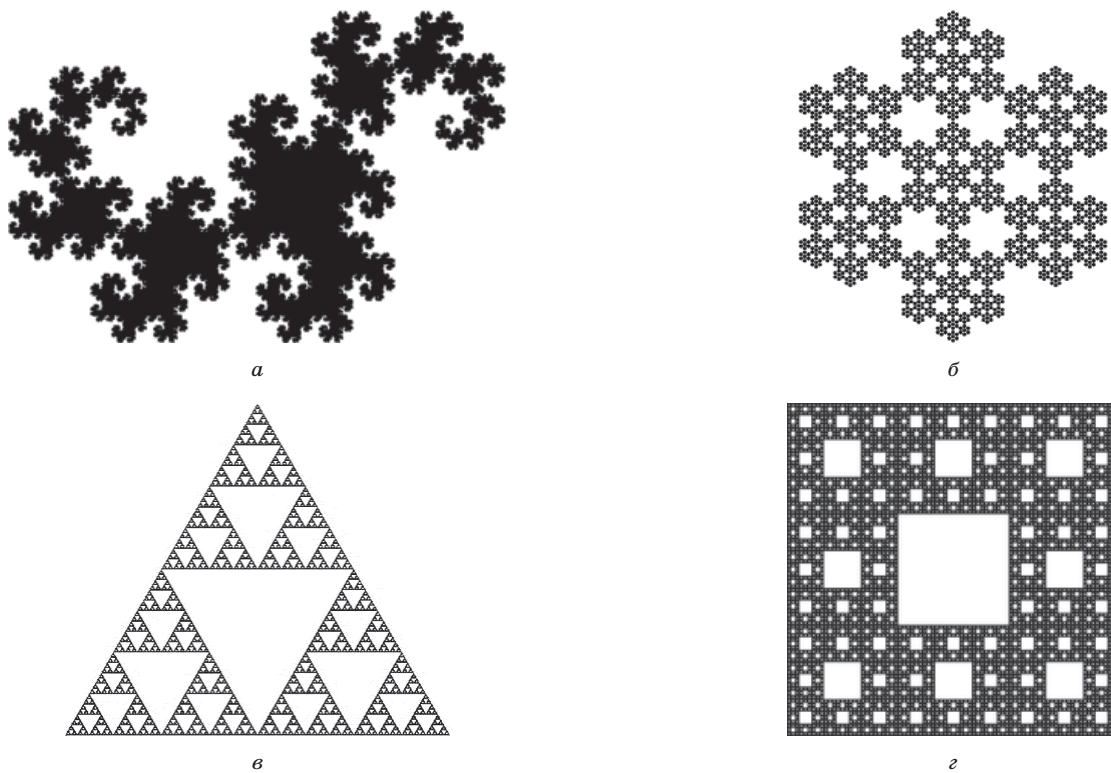


Рис. 2. Простейшие фракталы высокого порядка: кривая дракона (а), снежинка Коха (б), треугольник Серпинского (в), ковер Серпинского (г)

рекуррентных формул, и об исключительности метода итераций в области фрактальной геометрии говорил еще Б. Мандельброт [19, с. 131–140]. А самому методу итераций отводится важное место в профильном курсе математики в старших классах средней школы, поскольку этот метод является подчас единственным эффективным способом решения нелинейных уравнений, приближенного вычисления корней, доказательства ряда теорем [20, с. 66–83].

Наиболее наглядно итерационные процессы в школьном курсе математики могут быть представлены при знакомстве учащихся с простейшим фракталом «снежинка Коха» (рис. 3), названным по имени его автора — шведского математика Хельге фон Коха (1870–1924). Этот фрактал строится на основе правильного треугольника, каждая сторона которого  $a$ , принятая для простоты за единицу ( $a = 1$ ), последовательно — на каждом шаге итерации — делится на три равные части. На каждой центральной части стороны длиной  $a/3 = 1/3$ , как на основании,

также строится внешний равносторонний треугольник, причем эта процедура может повторяться бесконечное число раз ( $D \rightarrow \infty$ ) — насколько позволяет масштаб. В результате образуется причудливый геометрический объект замкнутой формы, напоминающий снежинку. Как и у всякой фрактальной кривой, каждый новый элемент снежинки Коха повторяет предыдущий, но в меньшем размере, что является свидетельством итерационного процесса ее геометрического построения.

Очевидно, что построение фракталов высокого порядка, даже таких относительно простых, как снежинка Коха, невозможно осуществить традиционными способами — с помощью циркуля и линейки. Для этого привлекаются различные компьютерные программы — так называемые «генераторы фракталов», свободно доступные в сети Интернет: Art Dabbler, Apophysis, Chaoscope, ChaosPro, Electric Sheep, Fractal Explorer, Fractint, Fractracer, IFS Builder 3D, Mandelbulb3D, Mandelbulber, Sterling,

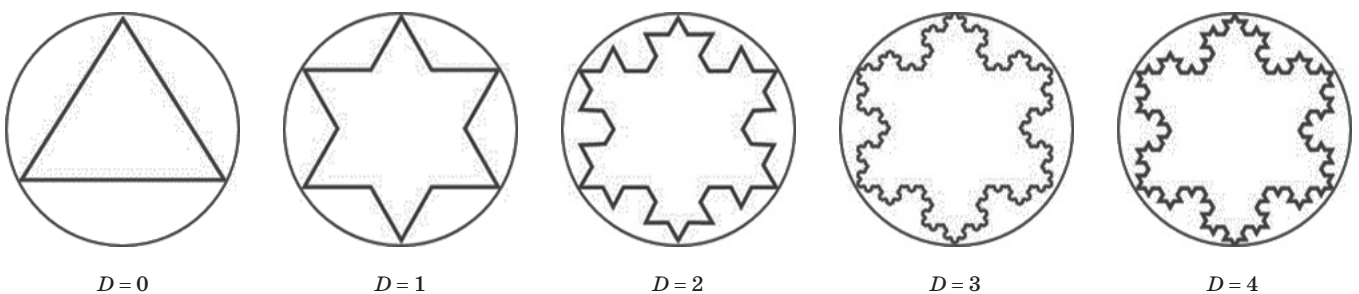


Рис. 3. Развитие фрактала «снежинка Коха» в зависимости от номера итерации  $D$

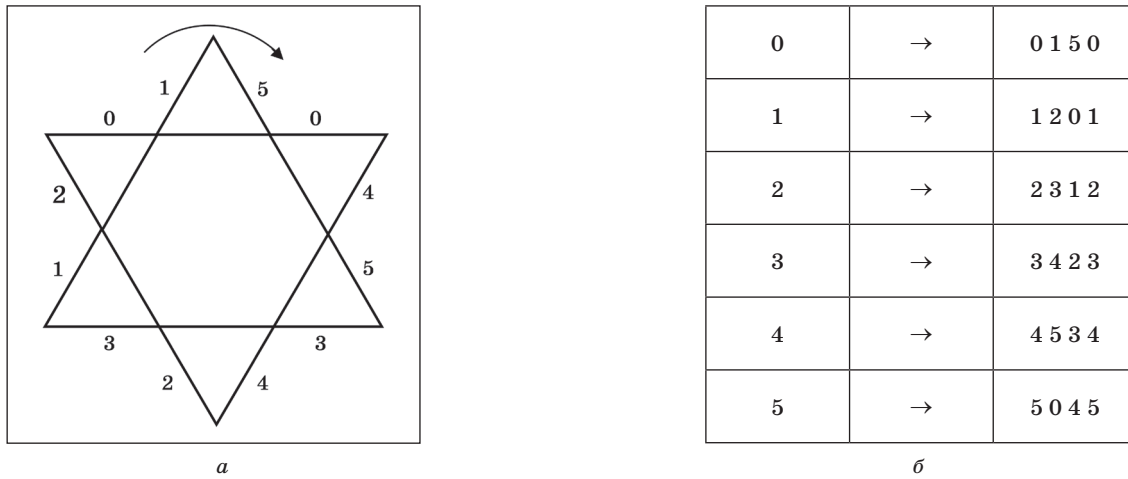


Рис. 4. «Коды» сторон снежинки Коха при  $D = 1$  (а) и таблица замены ребра на соответствующие развороты (б)

SpangFract, Ultra Fractal, XaoS, XenoDream, FLAM3, Gnofract 4D и др.

Учащиеся, владеющие языками программирования, могут сами написать программу для построения снежинки Коха. При этом им может помочь кодировка сторон треугольника, изображенная на рисунке 4, а. Каждая цифра кода соответствует наклону стороны исходного единичного треугольника (0, 2, 4) и его зеркального отображения (1, 3, 5), которые вместе образуют «Звезду Давида» — фрактал «снежинка Коха» при номере итерации  $D = 1$ . При построении новых треугольников с основаниями на центральной части (трети) каждого ребра происходит следующая замена с движением по часовой стрелке:

- ребра 0 — на «разворот» 0150;
- ребра 1 — на «разворот» 1201;
- ребра 2 — на «разворот» 2312;
- ребра 3 — на «разворот» 3423;
- ребра 4 — на «разворот» 4534;
- ребра 5 — на «разворот» 5045 и т. д. [21] (рис. 4, б).

Примеры программ для построения других фрактальных кривых на языке Паскаль см., например, в [14, с. 3–24; 20, с. 142–167].

Однако на первом этапе знакомства учащихся с фрактальными кривыми, когда школьники приобретают первоначальный опыт в установлении связей между конечными и бесконечными величинами, а также учатся пользоваться рекуррентными формулами, «привязанными» к этапам построения фрактальной кривой, неоценимую помощь в визуализации процедуры оказывает интерактивная творческая среда «1С:Математический конструктор» [22, 23].

Одним из инструментов «1С:Математического конструктора» является функция деления фиксированного отрезка на  $N$  равных частей, что значительно облегчает построение снежинки Коха порядка, или номера итерации,  $D: N = 3^D$ . Это означает, что сторона исходного единичного треугольника при  $D = 0$  не делится на части, при  $D = 1$  делится на три равные части, при  $D = 2$  — делится на девять равных частей, при  $D = 3$  — на 27 и т. д. (см. табл.).

Таблица

**Расчет периметра  $P_D$  и площади  $S_D$  снежинки Коха, построенной из единичного равностороннего треугольника, в зависимости от номера итерации  $D$  и предыдущих значений  $P_{D-1}$  и  $S_{D-1}$**

Номер итерации $D$	Делитель стороны треугольника $N = 3^D$	Вычисление характеристик снежинки Коха в зависимости от номера итерации $D$ :	
		Периметр снежинки Коха $P_D = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^D = \frac{4}{3} \cdot P_{D-1}$	Площадь снежинки Коха $S_D = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{D=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^D\right] = S_{D-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^D$
0	1	$P_0 = 3a/1 = 3,00$	$S_0 = \sqrt{3}/4 \cdot 1^2 = 0,433$
1	3	$P_1 = 3 \cdot 4/3 = 4,00$	$S_1 = 0,433 + 0,433 \cdot 1/3 = 0,577$
2	9	$P_2 = 48/9 = 16/3 = 5,33$	$S_2 = 0,577 + 0,433 \cdot 4/27 = 0,641$
3	27	$P_3 = 192/27 = 64/9 = 7,11$	$S_3 = 0,641 + 0,433 \cdot 16/243 = 0,669$
4	81	$P_4 = 768/81 = 256/27 = 9,48$	$S_4 = 0,669 + 0,433 \cdot 64/2187 = 0,682$
5	243	$P_5 = 3072/243 = 1024/81 = 12,64$	$S_5 = 0,682 + 0,433 \cdot 256/19683 = 0,688$
6	729	$P_6 = 12288/729 = 4096/243 = 16,86$	$S_6 = 0,688 + 0,433 \cdot 1024/177147 = 0,691$

Процедура построения снежинки Коха заданного номера итерации  $D$  демонстрируется на рисунке 5. На каждом шаге итерации сторона единичного треугольника делится на  $N = 3^D$  частей (или на три части по сравнению с предыдущим шагом), причем границы отрезков на сторонах треугольника автоматически отмечаются точками. А затем на каждой второй (средней) части трех вновь полученных отрезков, как

на основаниях, строятся внешние равносторонние треугольники, что также осуществляется автоматически с помощью вызова соответствующей функции на панели инструментов «1С:Математического конструктора».

Как говорилось выше, с помощью математических расчетов учащиеся могут убедиться в наличии двух свойств, которыми обладает снежинка Коха, —

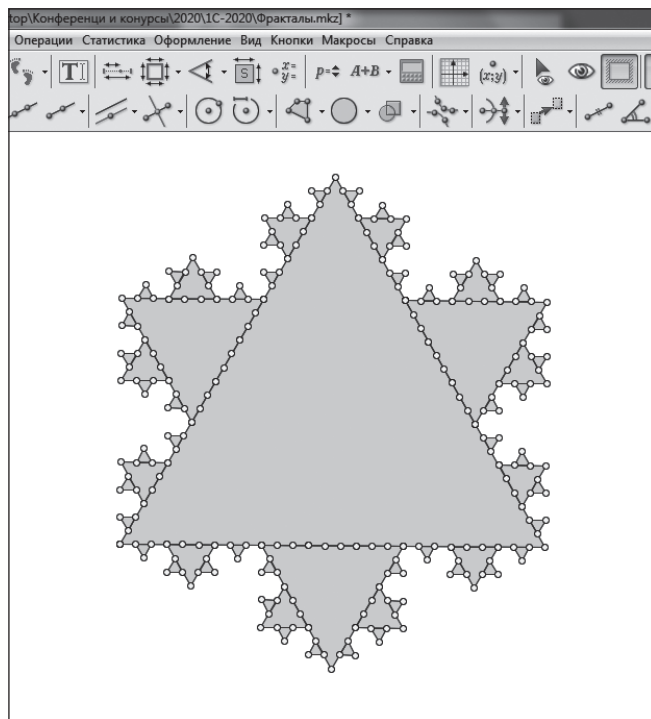
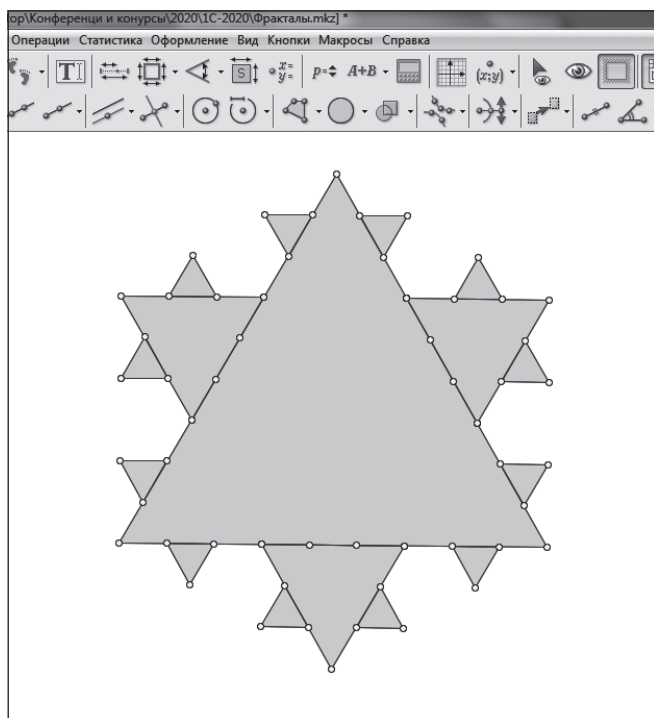
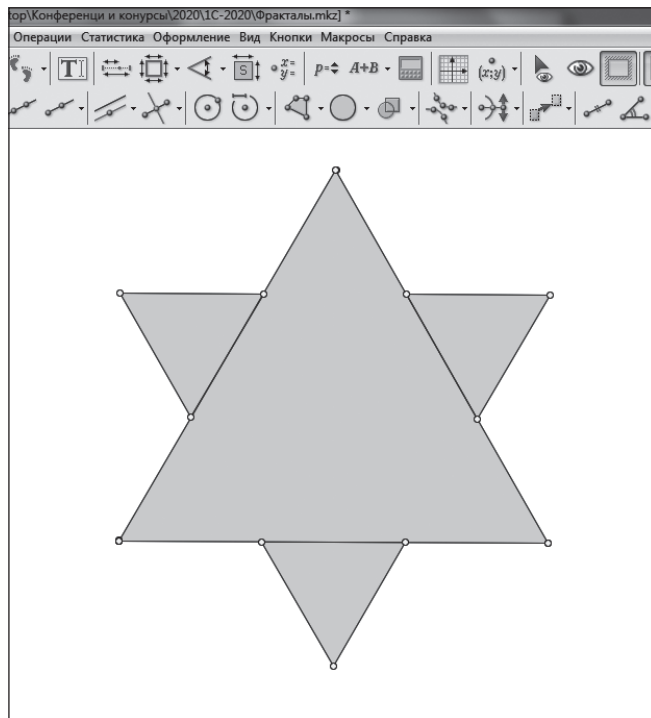
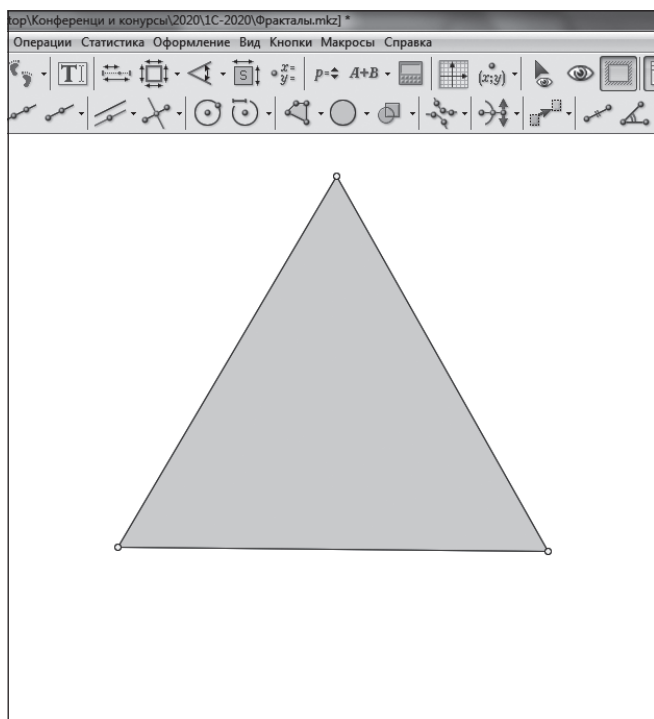


Рис. 5. Этапы построения снежинки Коха (для  $D = 0, 1, 2, 3$ ) в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор»

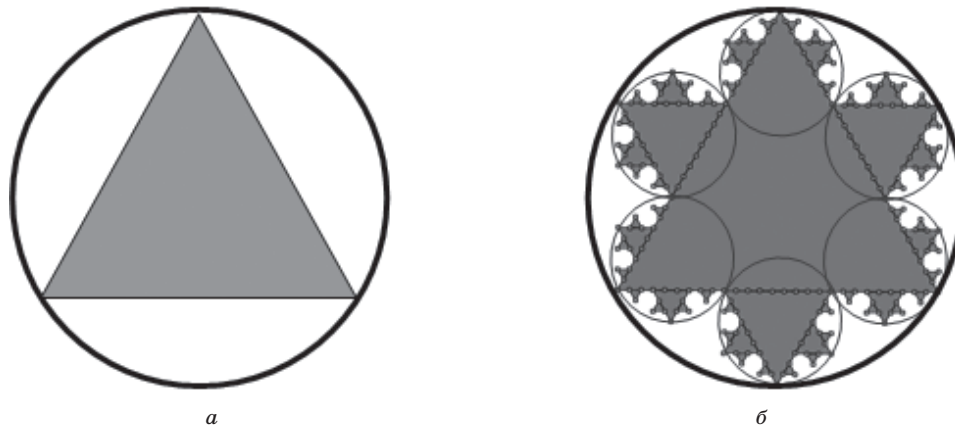


Рис. 6. К вычислению границ площади фрактала «снежинка Коха»: для  $D = 0$  (а) и  $D = 3$  (б)

конечности площади  $S_D$  и бесконечности ее периметра ( $P_D \rightarrow \infty$ ) при  $D \rightarrow \infty$ , где  $D$  — порядок сложности фрактала, или шаг итерации. В таблице приведены формулы для расчета периметра  $P_D$  и площади  $S_D$ : нерекуррентные формулы (зависимые только от шага итерации  $D$ ) и рекуррентные формулы (зависимые от значений периметра или площади, полученных на предыдущем шаге итерации), которые для наглядности заключены в рамки, а также результаты расчетов при значениях  $D$  от 0 до 6. Вывести эти формулы и произвести расчеты несложно, поэтому учащиеся смогут самостоятельно справиться с подобной задачей.

Из прямых вычислений по формулам, приведенным в таблице, видно, во-первых, что результаты расчетов, полученные по рекуррентным и нерекуррентным формулам, совпадают, во-вторых, что с ростом номера итерации  $D$  периметр  $P_D$ , являясь показательной функцией, растет, а площадь  $S_D$ , представляющая собой сходящийся ряд показательной функции, стремится к некоторому асимптотическому значению. И это значение — предел площади снежинки Коха — можно и оценить (определить пределы, в которых заключается ее величина), и вычислить напрямую.

Оценку пределов, в которых может изменяться площадь снежинки Коха, можно получить иллюстративно-вычислительным (или «геометрико-алгебраическим») способом, причем с разной степенью точности оценки.

Очевидно, что фрактал «снежинка Коха» «развивается» из равностороннего треугольника (рис. 6, а). Поэтому минимальная площадь фрактала при нулевом шаге итерации  $D = 0$  равна площади равностороннего треугольника со стороной  $a$ , которая при  $a = 1$  составит:

$$S_{\min} = S_{\text{ОКР}} = S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \approx 0,433.$$

Вокруг единичного равностороннего треугольника можно описать окружность, радиус которой:

$$R_0 = \frac{\sqrt{3}a}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

а площадь:

$$S_{\text{ОКР}} = \pi R_0^2 = \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{\pi}{3} \approx 1,046.$$

Поэтому площадь снежинки Коха  $S_D$  при любом номере итерации  $D$  не выйдет за пределы  $S < S_D < S_{\text{ОКР}}$ , где  $S$  — площадь единичного равностороннего треугольника, а  $S_{\text{ОКР}}$  — площадь описанной вокруг него окружности (см. рис. 6, а, б), или  $0,433 < S_D < 1,046$ .

Кроме того, каждый из шести лепестков снежинки Коха, построенных на основе треугольников со сторонами  $a = 1/3$  и площадью  $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \approx 0,048$  на этапе итерации при  $D = 1$ , также может быть описан окружностью с радиусом:

$$R_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Тогда площадь каждой такой окружности:

$$S_{\text{ОКР1}} = \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{9} \right)^2 = \frac{\pi}{27} \approx 0,116,$$

а ее вклад в верхний предел площади  $S_{D_{\max}}$  при  $D \rightarrow \infty$  равен площади двух ее сегментов:

$$\frac{2}{3} (S_{\text{ОКР1}} - S_1),$$

и таких слагаемых будет шесть — по числу лепестков.

Тогда приращение общей площади составит:

$$6 \cdot \frac{2}{3} \cdot (S_{\text{ОКР1}} - S_1) = 4 \cdot (S_{\text{ОКР1}} - S_1),$$

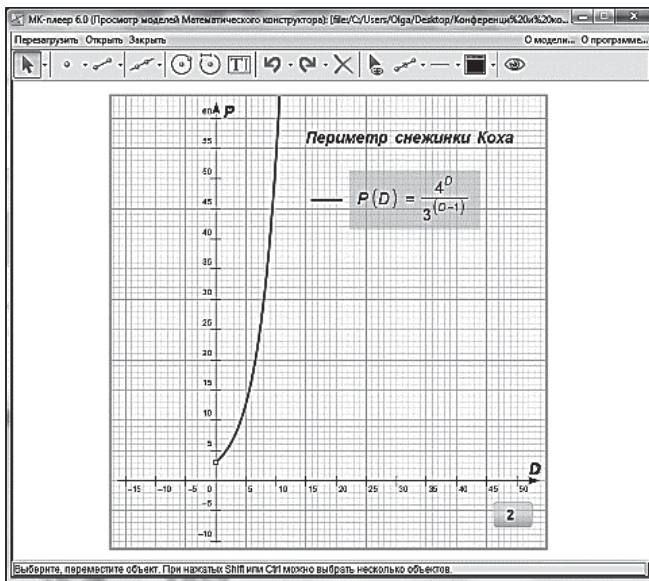
а более точный верхний предел площади:

$$S_{D_{\max}} = S + 4 \cdot (S_{\text{ОКР1}} - S_1) = 0,433 + 4 \cdot (0,116 - 0,048) = 0,705,$$

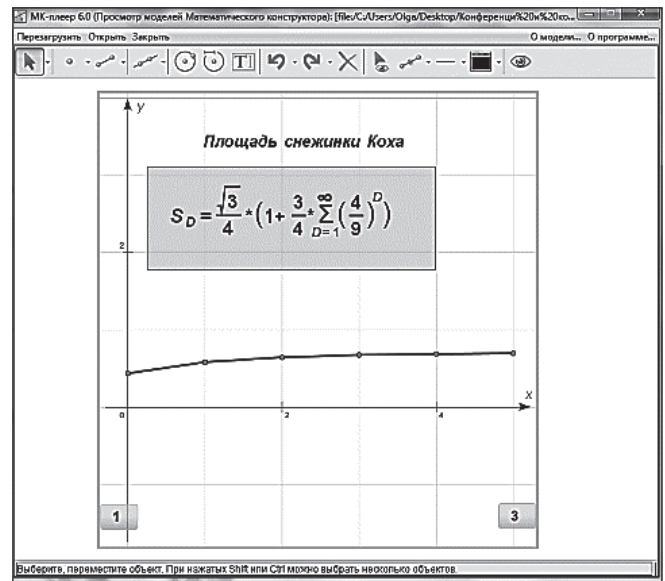
или

$$0,433 < S_D < 0,705.$$

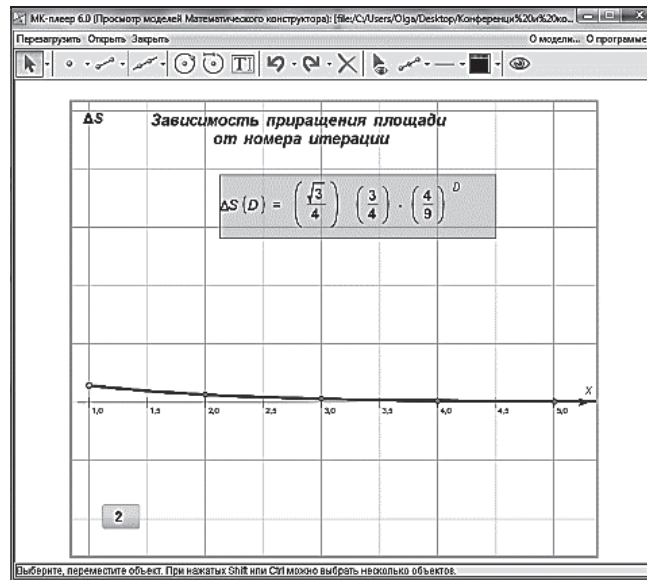
Верхний предел площади  $S_D$  при  $D \rightarrow \infty$  может быть найден также алгебраическим способом с использованием нерекуррентной формулы из правого столбца таблицы:



а



б



в

Рис. 7. Вычисление периметра  $P_D$  (а), площади  $S_D$  (б) и приращения площади  $\Delta S_D$  (в) фрактала «снежинка Коха» в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор»

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow \infty} S_D &= \lim_{D \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[ 1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{D=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^D \right] \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left( 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4/9}{1-4/9} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0,693. \end{aligned}$$

Кроме того, в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор» с использованием формул для характеристик снежинки Коха:

- периметра  $P_D = 3 \cdot \left( \frac{4}{3} \right)^D$ ;
- площади  $S_D = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[ 1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{D=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^D \right]$ ;

- приращения площади  $\Delta S_D = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{4}{9} \right)^D$

построены графики, представленные на рисунке 7, которые наглядно демонстрируют экспоненциальный рост периметра снежинки Коха (а), сходимости ее площади к значению 0,693 (б) за счет снижения до нуля приращения площади (в) при росте номера итерации D.

#### 4. Выводы

В заключение отметим, что интерактивная творческая среда «1С:Математический конструктор» в очередной раз демонстрирует возможность визуализации сложных геометрических построений,

которые с трудом или вовсе не поддаются реализации традиционными средствами — с помощью циркуля и линейки. Кроме того, осуществляя в среде «1С:Математический конструктор» итерационные (многочисленно повторяющиеся) построения и алгебраические вычисления, учащиеся приобретают устойчивый навык оперирования геометрическими объектами различного уровня сложности и постигают возможности математической интерпретации итерационных процессов на практике.

Что касается объектов фрактальной геометрии, в частности снежинки Коха, то визуальный способ ее построения является наглядным свидетельством наличия диалектического единства *конечности* площади и *бесконечности* периметра плоской геометрической фигуры — неявного и необычного свойства фракталов. Знакомство учащихся с подобными противоречивыми понятиями и категориями пополнит опыт мировоззренческого осмысления изучаемых ими предметных областей через понятие «большие идеи», что позволит с новых позиций взглянуть на процессы, происходящие в окружающем мире.

#### Список использованных источников

1. Семинар с международным участием «Наука — фундамент школы XXI века». <https://rffi.bss.design/>
2. Ермаков С. В., Попов А. А., Аверков М. С., Глухов П. П. Развитие математического мышления в практиках открытого образования. М.: Ленанд, 2017. 152 с.
3. Шваб К., Дэвис Н. Технологии Четвертой промышленной революции. М.: Эксмо, 2018. 320 с. <https://cdn.eksmo.ru/v2/ITD00000000911994/PDF/ITD00000000911994.pdf>
4. Розов Н. Х. Какой будет школьная математика в 2050 году? // Математическое образование. 2010. № 54. С. 2–7. [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=136&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=136&option_lang=rus)
5. Тарасенко В. В. Фрактальная логика. М.: Либроком, 2009. 337 с.
6. Тарасенко В. В. Фрактальная семиотика: «слепые пятна», перипетии и узнавания. М.: Либроком, 2009. 232 с.
7. Свирский Я. И. Самоорганизация смысла (опыт синергетической онтологии). М.: ИФ РАН, 2001. 182 с.
8. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 217 с. <http://www.klex.ru/10v>
9. Лабуть А. Фрактальные множества на комплексной плоскости. SciTecLibrary, 2003. <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/4953.html>
10. Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009. Т. 6. № 11-1. С. 135–145. <http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/506/ru/pdf/11-10.pdf>
11. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. М.: Едиториал УРСС, ЛКИ, 2015. 402 с.
12. Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
13. Деменок С. Л. Просто фрактал. СПб.: Страта, 2012. 176 с.
14. Златопольский Д. М. Замечательные кривые. М.: Чистые пруды, 2008. 32 с.
15. Белоглазова Е. В. Фрактальная природа полидискурса // Англистика XXI века. Материалы V Всероссийской научной конференции памяти профессора В. В. Бурлаковой. СПб.: Университетский образовательный округ Санкт-Петербурга и Ленинградской области, 2010. С. 211–212.
16. Богатых Б. А. Фрактальная природа живого. Системное исследование биологической эволюции и природы сознания. М.: Либроком, 2012. 202 с.
17. Корчажкина О. М. Содержание и практика применения метапредметного подхода к смешанному обучению. Ногинск: АНАЛИТИКА РОДИС, 2017. 450 с.
18. Корчажкина О. М. Фрактальная модель процесса познания // Вопросы философии. 2016. № 5. С. 93–105.
19. Мандельброт Б. Б. Фракталы и возрождение теории итераций // Пайтген Х.-О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. С. 131–140. <http://www.philsci.univ.kiev.ua/biblio/Pajt.html>
20. Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? М.: Ленанд, 2016. 272 с.
21. Колесников А. Как построить снежинку Коха // KV.by High-Tech Club. 2000. № 49. <https://www.kv.by/archive/index2000491201.htm>
22. 1С:Математический конструктор 6.0. <https://obr.1c.ru/educational/uchenikam/mathkit/>
23. Корчажкина О. М. Изучение итерационных процессов при геометрических построениях в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор» // Новые информационные технологии в образовании. Сборник научных трудов 20-й международной научно-практической конференции. Ч. 2. М.: 1С-Паблишинг, 2020. С. 221–224. <https://educonf.1c.ru/conf2020/thesis/6055/>

## MEET FRACTAL CURVES WITH 1С:MATHKIT

O. M. Korchazhkina<sup>1</sup>

<sup>1</sup> The Federal Research Centre "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences  
119333, Russia, Moscow, ul. Vavilova, 44, building 2

#### Abstract

The article presents a methodological approach to studying iterative processes in the school course of geometry, by the example of constructing a Koch snowflake fractal curve and calculating a few characteristics of it. The interactive creative environment 1С:MathKit is chosen to visualize the method discussed. By performing repetitive constructions and algebraic calculations using ICT tools, students acquire a steady skill of work with geometric objects of various levels of complexity, comprehend the possibilities of mathematical interpretation of iterative processes in practice, and learn how to understand the dialectical unity between finite and infinite parameters of flat geometric figures. When students are getting familiar with such contradictory concepts and categories, that replenishes their experience of worldview comprehension of the subject areas they study through the concept of “big ideas”. The latter allows them to take a fresh look at the processes in the world around. The article is a matter of interest to schoolteachers of computer science and mathematics, as well as university scholars who teach the course “Concepts of modern natural sciences”.

**Keywords:** big ideas, mathematical education, fundamental core, content of education, general education, fractal, Koch snowflake, 1C:MathKit, interactive environment, iteration method, recurrent formula.

**DOI:** 10.32517/0234-0453-2020-35-3-38-48

**For citation:**

*Korchazhkina O. M.* Znakomstvo s fraktal'nymi krivymi v interaktivnoj tvorcheskoj srede "1C:Matematicheskij konstruktor" [Meet fractal curves with 1C:MathKit]. *Informatika i obrazovanie — Informatics and Education*, 2020, no. 3, p. 38–48. (In Russian.)

**Received:** February 17, 2020.

**Accepted:** March 17, 2020.

**About the author**

**Olga M. Korchazhkina**, Candidate of Sciences (Engineering), Senior Research Fellow, Institute for Cybernetics and Informatics in Education, Federal Research Centre "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; olgakomax@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0020-4914

## References

1. Seminar s mezhdunarodnym uchastiem "Nauka — fundament shkoly XXI veka" [A workshop with international participation "Science as the basis of the 21st century school"]. (In Russian.) Available at: <https://rffi.bss.design/>
2. *Ermakov S. V., Popov A. A., Averkov M. S., Glukhov P. P.* Razvitie matematicheskogo myshleniya v praktikakh otkrytogo obrazovaniya [Development of mathematical thinking in practice of mathematical education]. Moscow, Lenand, 2017. 152 p. (In Russian.)
3. *Shvab K., Devis N.* Tekhnologii Chetvertoj promyshlennoj revolyutsii [Shaping the Fourth Industrial Revolution]. Moscow, Eksmo, 2018. 320 p. (In Russian.) Available at: <https://cdn.eksmo.ru/v2/ITD000000000911994/PDF/ITD000000000911994.pdf>
4. *Rozov N. Kh.* Kakoj budet shkol'naya matematika v 2050 godu? [What will school mathematics be like in 2050?]. *Matematicheskoe Obrazovanie — Mathematical Education*, 2010, no. 54, p. 2–7. (In Russian.) Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&aperid=136&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&aperid=136&option_lang=rus)
5. *Tarasenko V. V.* Fraktal'naya logika [Fractal Logic]. Moscow, Librokom, 2009. 337 p. (In Russian.)
6. *Tarasenko V. V.* Fraktal'naya semiotika: «slepye pyatna», peripetii i uznvaniya [Fractal semiotics: "Blind spots" in the twists and turns of recognition]. Moscow, Librokom, 2009. 232 p. (In Russian.)
7. *Svirsky Ya. I.* Samoorganizatsiya smysla (opyt sinergeticheskoy ontologii) [Self-organization of meaning (experience of synergetic ontology)]. Moscow, IFRAN, 2001. 182 p. (In Russian.)
8. *Pejtggen H.-O., Richter P. H.* Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnykh dinamicheskikh sistem [The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems]. Moscow, Mir, 1993. 217 p. (In Russian.) Available at: <http://www.klex.ru/10v>
9. *Loubout A.* Fraktal'nye mnozhestva na kompleksnoj ploskosti [Fractal sets on the complex plane]. SciTecLibrary, 2003. (In Russian.) Available at: <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/4953.html>
10. *Pavlov D. G., Panchelyuga M. S., Malykhin A. V., Panchelyuga V. A.* O fraktal'nosti analogov mnozhestv Mandel'brot i Zhyulia na ploskosti dvojnoj peremennoj [On fractality of Mandelbrot and Julia sets on a double-numbers plane]. *Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike — Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2009, vol. 6, no. 11-1, p. 135–145. (In Russian.) Available at: <http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/506/ru/pdf/11-10.pdf>
11. *Penrose R.* Novyj um korolya. O komp'yuterakh, myshlenii i zakonakh fiziki [The emperor's new mind: Concerning computers, minds and the laws of physics]. Moscow, Editorial URSS, LKI, 2015. 402 p. (In Russian.)
12. *Mandelbrot B. B.* Fraktal'naya geometriya prirody [The fractal geometry of nature]. Moscow, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002. 656 p. (In Russian.)
13. *Demnok S. L.* Prosto fraktal [Just a simple fractal]. Saint Petersburg, Strata, 2012. 176 p. (In Russian.)
14. *Zlatopolsky D. M.* Zamechatel'nye krivye [Wonderful curves]. Moscow, Chisty prudy, 2008. 32 p. (In Russian.)
15. *Beloglazova E. V.* Fraktal'naya priroda polidiskursa [The fractal nature of polydiscourse]. *Anglistika XXI veka. Materialy V Vserossijskoj nauchnoj konferentsii pamyati professora V. V. Burlakovo [Anglistics of the 21st century. Materials of the 5th All-Russian Scientific Conference in memory of Professor V. V. Burlakova]*. Saint Petersburg, Universitetskij obrazovatel'nyj okrug Sankt-Peterburga i Leningradskoj oblasti, 2010, p. 211–212. (In Russian.)
16. *Bogatykh B. A.* Fraktal'naya priroda zhivogo. Sistemnoe issledovanie biologicheskoy ehvolyutsii i prirody soznaniya [Fractal nature of the living: A systematic study of biological evolution and nature of consciousness]. Moscow, Librokom, 2012. 202 p. (In Russian.)
17. *Korchazhkina O. M.* Soderzhanie i praktika primeniya metapredmetnogo podkhoda k smeshannomu obucheniyu [The contents and application practice of the interdisciplinary approach to blended learning]. Noginsk, ANALITIKA RODIS, 2017. 450 p. (In Russian.)
18. *Korchazhkina O. M.* Fraktal'naya model' protsessy poznaniya [A fractal model of a cognition process]. *Voprosy filosofii — Philosophy Issues*, 2016, no. 5, p. 93–105. (In Russian.)
19. *Mandelbrot B. B.* Fraktaly i vozrozhdenie teorii iteracij // *Pejtggen H.-O., Richter P.* Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnykh dinamicheskikh sistem. [Fractals and the revival of the theory of iterations. In: *Pejtggen H.-O., Richter P. H.* The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems]. Moscow, Mir, 1993, p. 131–140. (In Russian.) Available at: <http://www.philsci.univ.kiev.ua/biblio/Pajt.html>
20. *Sekovanov V. S.* Chto takoe fraktal'naya geometriya? [What is fractal geometry?]. Moscow, Lenand, 2016. 272 p. (In Russian.)
21. *Kolesnikov A.* Kak postroit' snezhinku Kokha [How to build a Koch snowflake?]. *KV.by High-Tech Club*, 2000, no. 49. (In Russian.) Available at: <https://www.kv.by/archive/index2000491201.htm>
22. 1C:Matematicheskij konstruktor 6.0 [1C:MathKit 6.0]. (In Russian.) Available at: <https://obr.1c.ru/educational/uchenikam/mathkit/>
23. *Korchazhkina O. M.* Izuchenie iteratsionnykh protsessov pri geometricheskikh postroeniyakh v interaktivnoj tvorcheskoj srede "1C:Matematicheskij konstruktor" [Studying iterative processes while performing geometric constructions in 1C:MathKit]. *Novye informatsionnye tekhnologii v obrazovanii. Sbornik nauchnykh trudov 20-j mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferentsii. Chast' 2 [New information technologies in education. Collection of research papers for the 20th international research-to-practice conference. Part 2]*. Moscow, 1C-Publishing, 2020, p. 221–224. (In Russian.) Available at: <https://educonf.1c.ru/conf2020/thesis/6055/>