

О. М. Корчажкина,

Институт кибернетики и образовательной информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва

МЕТОД ВИРТУАЛЬНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ РЕШЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Аннотация

В статье обсуждаются способы решения вероятностных задач с помощью виртуального статистического эксперимента. На примере пяти способов разрешения парадокса Бертрана сравниваются традиционные методы, основанные на геометрических построениях, и метод динамической электронной визуализации с помощью интерактивной программной платформы «1С:Математический конструктор 6.0».

Ключевые слова: вероятностная задача, электронная визуализация, виртуальная среда, математический конструктор, «1С:Математический конструктор 6.0», парадокс Бертрана, теория вероятностей.

Одной из областей математики, которая может предоставить богатый материал для развития интеллектуальных способностей учащихся, является теория вероятностей. При изучении вероятностных событий на элементарном уровне большую роль предполагается отводить экспериментальной проверке, которую иногда бывает довольно сложно осуществить средствами натурального эксперимента в реальной учебной практике. Тогда как визуальная экспериментальная проверка результатов решения вероятностных задач, представляющих определенную трудность для учащихся старшей школы даже с высоким уровнем предметной подготовки, может послужить дополнительной мотивацией при изучении этих непростых для понимания и усвоения разделов курса теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики, включенных в основную образовательную программу для старшей школы под названием «Статистика и теория вероятностей».

Математика как учебный предмет в ее классическом виде не предоставляет инструментов для визуализации вероятностных событий, которые изначально ориентированы не на иллюстративный, а на динамический тип визуализации, особенно если они предполагают операции с геометрическими или реальными объектами. Практика показывает, что

привлечение электронно-цифровых инструментов для организации виртуальных экспериментов при решении вероятностных задач является наиболее целесообразной и эффективной формой визуализации, поскольку позволяет учащимся в условиях, приближенных к реальным, подобрать наиболее приемлемые стратегии решения статистических задач и убедиться в правильности сделанного выбора.

Поэтому интерактивные методы обучения, которые предоставляются информационно-коммуникационными технологиями, могут и должны привлекаться на уроках математики, когда школьники учатся работать с разными видами информации, в том числе статистической, овладевают средствами визуализации, проводят эксперименты и исследования в виртуальных лабораториях.

Более того, объединение в последней редакции федеральных государственных образовательных стандартов предметных областей «Математика» и «Информатика» в единую область знаний «Математика и информатика» позволяет не просто осуществлять единичные и нередко случайные межпредметные связи между двумя родственными дисциплинами — возможным становится слияние предметных знаний и формируемых компетенций при изучении целых разделов программ по инфор-

Контактная информация

Корчажкина Ольга Максимовна, канд. тех. наук, ст. научный сотрудник Института кибернетики и образовательной информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва; адрес: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2; телефон: (495) 135-64-61; e-mail: olgakomax@gmail.com

O. M. Korchazhkina,

Institute for Cybernetics and Informatics in Education, Federal Research Centre "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow

HOW TO SOLVE PROBABILISTIC TASKS WITH THE USE OF A VIRTUAL STATISTICAL EXPERIMENT

Abstract

The article discusses a few ways of how to solve probabilistic problems with the use of conducting a virtual statistical experiment. By the example of five ways to resolve the Bertrand paradox, we compare traditional methods based on geometrical modelling and a method founded on dynamic electronic visualization within an interactive software platform 1C:MathKit 6.0.

Keywords: probabilistic task, electronic visualization, virtual environment, MathKit, 1C:MathKit 6.0, Bertrand paradox, probability theory.

матике и математике с точки зрения интеграции содержания, методов решения задач, привлекаемых интерактивных инструментов и обобщения учебного материала в целом.

Проведение виртуальных экспериментов, как одного из способов электронной динамической визуализации, осуществляется на цифровых платформах, получивших название **интерактивных творческих сред**. Одним из таких интерактивных средств обучения является включенная в систему динамической математики предметная творческая среда «1С:Математический конструктор 6.0» [1].

Особенно важно проведение экспериментов при решении задач с неоднозначным ответом, а также при разрешении так называемых **математических парадоксов**. Отличительной особенностью математических парадоксов является то, что они вполне логически выводятся из известных аксиом и теорем, однако получаемый результат настолько противоречит обыденному сознанию или интуитивному знанию, что может поставить под сомнение весь спектр математических инструментов, применяемых для их решения. Вот тогда выходом может явиться либо проведение эксперимента, либо поиск концептуальных противоречий в условии или ходе решения задачи, а иногда и то, и другое.

Рассмотрим одну из таких нестандартных задач, которая имеет не одно, а сразу три логически обоснованных, но противоречащих друг другу решения, — **парадокс Бертрана**. Класс подобных задач требует вовлечения пространственного воображения, поэтому применение обучающих творческих сред и виртуальных лабораторий предоставляет учащимся дополнительную визуальную опору, которая облегчает поиск решения задачи за счет демонстрации исследуемых процессов и явлений в движении и развитии.

Традиционно парадокс Бертрана рассматривается как классическая задача теории вероятностей, не имеющая однозначного решения, пока не определен механизм или метод выбора исходной случайной величины. Автором этой задачи является французский математик Жозеф Бертран (1822–1900), который описал этот вероятностный парадокс в своей работе «Calcul des probabilités» («Исчисление вероятностей»), вышедшей в Париже в 1889 году. Задача была предложена им в качестве примера того, что вероятность наступления события не может быть четко определена без выбора первоначальных допущений, служащих отправной точкой рассуждения [см. 2, с. 130–133]. При этом результат разрешения парадокса Бертрана зависит от выбора механизма или способа случайных построений, поэтому подобную задачу можно отнести к области теории вероятностей.

Итак, пусть имеется окружность единичного радиуса, в которую вписан равносторонний треугольник с длиной стороны l (рис. 1). Проведем внутри окружности произвольную хорду d и обозначим ее длину через m . Задача состоит в определении вероятности $P_{m>l}$ того, что $m > l$, т. е. вероятности того, что длина произвольной (наугад выбранной) хорды d единичной окружности превышает длину стороны вписанного в нее равностороннего треугольника.

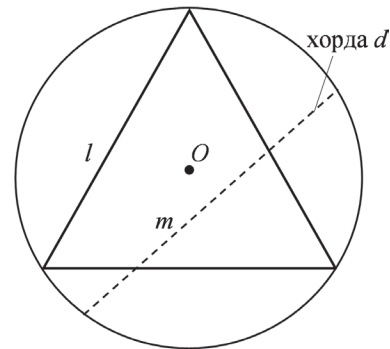


Рис. 1. Парадокс Бертрана

Рассмотрим несколько «решений» парадокса Бертрана, результат которых зависит от выбора способа геометрических построений множества хорд (первые три решения изложены в работе [2, с. 130–133]). Парадокс состоит в том, что каждое из полученных решений является верным при тех начальных условиях, которые решающий принимает в качестве способа построения множества хорд.

Первое решение: метод «случайной середины». Впишем в треугольник еще одну окружность (назовем ее вписанной — на рисунке 2 она обозначена пунктиром, а площадь соответствующего круга закрашена серым цветом), радиус OR которой, очевидно, равен $1/2$. Внутри единичной окружности проведем в случайном порядке (безо всяких правил и привязок к определенным координатам) несколько хорд: d_1, d_2, d_3, d_4 и d_5 . Как видим, хорды d_1 и d_5 не пересекают вписанную окружность, хорды d_2 и d_3 пересекают ее (иными словами, середины этих хорд, обозначенные «крестиками» на рисунке 2, находятся внутри вписанной окружности), а хорда d_4 является касательной к вписанной окружности (точка касания совпадает с серединой хорды). Очевидно, что середины произвольно проведенных нами хорд находятся внутри вписанного круга с радиусом $1/2$, а середины всех возможных хорд — в круге единичного радиуса. Это означает, что все хорды, чьи середины попали в область вписанного круга, имеют длину m больше длины стороны треугольника l . А вероятность такого события $P_{m>l}$ определяется путем соотношения площадей вписанного и единичного круга: $S_2 = \pi/4$ и $S_1 = \pi$, т. е. $P_{m>l} = S_2/S_1 = 1/4$. Отметим еще раз, что такова искомая вероятность $P_{m>l}$ при *произвольном*

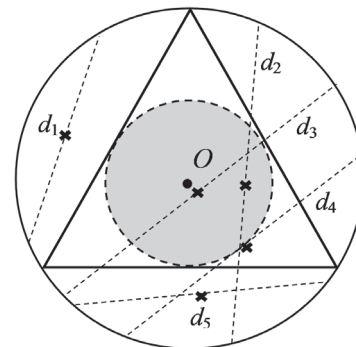


Рис. 2. Первое решение парадокса Бертрана методом «случайной середины»:

$$P_{m>l} = 1/4$$

построении хорд, середины которых заполняют всю площадь вписанного круга радиусом $1/2$.

Второе решение: метод «случайного радиуса». Опустим из центра окружностей O перпендикуляр OR на одну из сторон треугольника и продлим его до пересечения с единичной окружностью в точке Q (рис. 3). Длина отрезка OR , как мы выяснили, рассматривая первое решение парадокса Бертрана, равна половине радиуса единичной окружности: $OR = 1/2$. Тогда отрезок RQ — расстояние между стороной треугольника, на которую опущен перпендикуляр, и точкой его пересечения с единичной окружностью RQ — равняется также $1/2$. На отрезке OQ находятся середины построенных нами параллельных друг другу хорд. Причем условию $m > l$ удовлетворяют только те хорды, середины которых лежат на отрезке OR , а он в два раза короче отрезка OQ . Поэтому вероятность $P_{m>l} = OR/OQ = 1/2$.

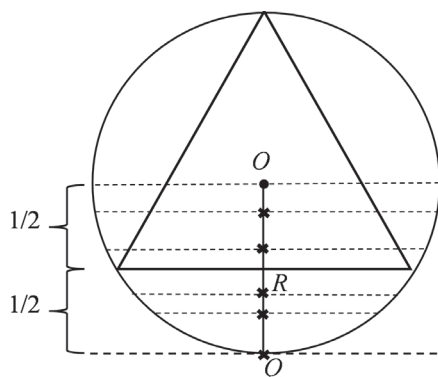


Рис. 3. Второе решение парадокса Бертрана методом «случайного радиуса»:
 $P_{m>l} = 1/2$

Третье решение: метод «случайных концов». Проведем хорду из вершины C треугольника под произвольным углом θ к касательной единичной окружности в точке C (рис. 4). Если $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ или $120^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, то $m \leq l$. Если $60^\circ < \theta < 120^\circ$, то $m > l$. Поэтому область, в которую заключены хорды длиной $m > l$, будет являться углом равностороннего треугольника, равный 60° . Внешние углы, составляющие 120° по отношению к углу θ , будут областью, через которую проходят хорды длиной $m < l$. Тогда $P_{m>l} = 60^\circ/180^\circ = 1/3$.

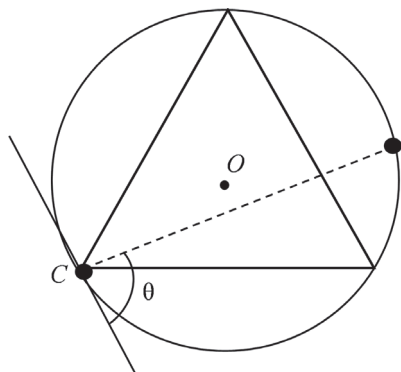


Рис. 4. Третье решение парадокса Бертрана методом «случайных концов»:
 $P_{m>l} = 1/3$

Модификацией третьего решения является **четвертое решение: метод «одного случайного конца»**, которое может быть предложено учащимся в качестве комбинации метода «случайной середины» и метода «случайных концов».

Из вершины C равностороннего треугольника, лежащей на единичной окружности, проведем «веер» хорд, на каждой из которых «крестиком» обозначим середину (рис. 5). Середины хорд будут располагаться на окружности, проходящей через центр единичной окружности O и вершину треугольника C , а центр ее будет расположен на биссектрисе угла ACB , соединяющей точку C с центром окружности O . На дуге, обозначенной AB и заключенной внутри треугольника и вписанной в него окружности, которая обозначена пунктиром с серой заливкой площади, будут находиться середины хорд, удовлетворяющих условию $m > l$ (на рисунке 5 это хорды d_3 , d_4 и d_5).

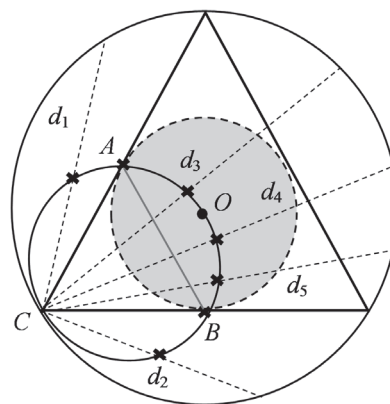


Рис. 5. Четвертое решение парадокса Бертрана методом «одного случайного конца»:
 $P_{m>l} = 1/3$

Все остальные хорды (на рисунке 5 это хорды d_1 и d_2) будут иметь длину $m < l$. Вероятность $P_{m>l}$ определяется отношением длины дуги AB к длине всей окружности. Очевидно, что длина этой окружности будет равна длине вписанной окружности, поскольку обе они имеют радиус $1/2$. Длина дуги AB составляет $1/3$ от длины окружности, на которой расположены середины хорд, поскольку вписанный в нее треугольник ABC подобен треугольнику, вписанному в единичную окружность, и поэтому также является равносторонним. Следовательно, $P_{m>l} = 1/3$.

Модификацией третьего решения парадокса Бертрана служит также **пятое решение**, названное методом «случайных треугольников». Из вершины B равностороннего треугольника ABC , вписанного в исходную единичную окружность (на рис. 6 расположена слева), проведем «веер» случайных хорд, на каждой из которых, как на основании, построим равносторонний треугольник.

На рисунке 6 хорды-основания обозначены пунктиром, а вершины равносторонних треугольников, противолежащие хордам-основаниям, помечены «крестиками». Эти вершины расположены также на единичной окружности (в нее на рисунке 6 вписан случайный равносторонний треугольник ADB , равный треугольнику ABC). Вероятность $P_{m>l}$ опре-

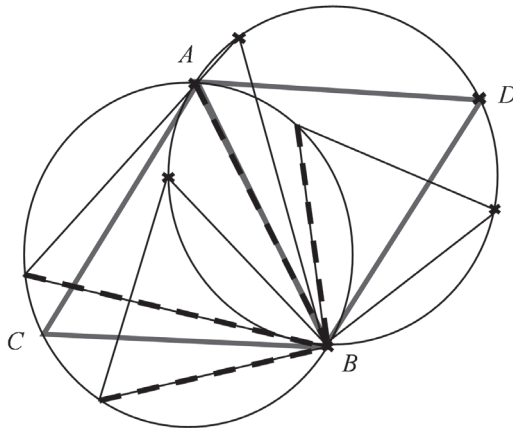


Рис. 6. Пятое решение парадокса Бертрана методом «случайных треугольников»: $P_{m>l} = 1/3$

деляется через соотношение длины дуги AD и длины всей вновь образованной единичной окружности, а ее длина составляет $1/3$ от всей длины окружности, на которой расположены вершины случайных треугольников. Следовательно, $P_{m>l} = 1/3$.

Итак, описанные «ручные» способы разрешения парадокса Бертрана, который представляет собой нетривиальную задачу из области теории вероятностей и математической статистики, обладают невысокой убедительностью. Поэтому учащимся средней школы ввиду отсутствия опыта оперирования не только взаимозависимыми случайными событиями, но и просто случайными величинами эти доказательства могут показаться недостаточно очевидными, а результаты действительно парадоксальными.

Выходом из сложившейся ситуации служит обращение к принципиально иному способу подтверждения вероятностных процессов — использованию плеера случайных испытаний, составляющего ядро виртуальной статистической лаборатории интерак-

тивного ресурса «1С:Математический конструктор 6.0» и позволяющего проводить наглядные динамические эксперименты путем моделирования и визуализации изучаемых понятий в ходе решения стохастических задач, одну из которых мы пытались решить с помощью традиционных геометрических построений.

На рисунках 7–9 приведены скриншоты результатов работы виртуальной статистической лаборатории «1С:Математического конструктора 6.0» по разрешению парадокса Бертрана первыми тремя методами, описанными выше, — «случайной середины», «случайного радиуса» и «случайных концов». Они представлены в виде графиков временного ряда, показывающих приближение вероятности $P_{m>l}$ к результирующему значению с увеличением числа испытаний (до 1000) при различных начальных условиях. В верхнем прямоугольном поле записана фиксированная длина стороны треугольника l , в поле ниже выводится значение длины хорды m и еще ниже — их соотношение: 0, если $m < l$, и 1, если $m > l$, которое сведено в таблицу справа. В нижнем прямоугольном поле ведется подсчет вероятности $P_{m>l}$, на основании которой строится график зависимости $P_{m>l}$ от числа испытаний (количества проведенных хорд). Описанные статистические эксперименты учащиеся могут провести самостоятельно с помощью плеера случайных испытаний, который имеется в коллекции интерактивных моделей ресурса «1С:Математический конструктор 6.0».

Четвертое и пятое решения парадокса Бертрана пока в литературе не освещены и, следовательно, статистических экспериментов, напрямую демонстрирующих динамику вычисления вероятности $P_{m>l}$, среди моделей математического конструктора нет. Однако они могут быть созданы самими учащимися на базе плеера случайных испытаний ресурса «1С:Математический конструктор 6.0»: на рисунках 10–11 представлены результаты соответствующих

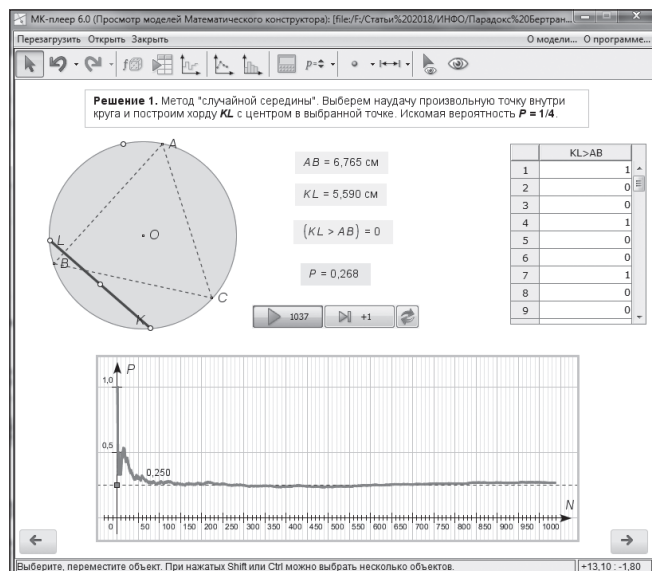


Рис. 7. Статистическое подтверждение первого решения парадокса Бертрана методом «случайной середины» в среде математического конструктора: $P_{m>l} = 1/4$

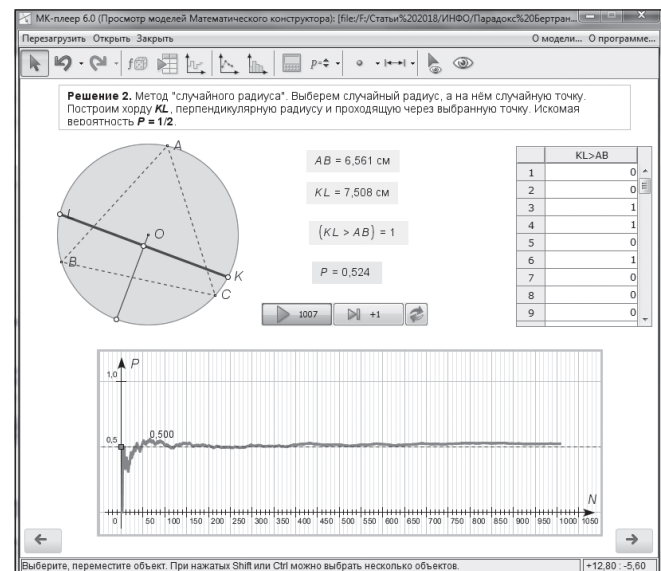


Рис. 8. Статистическое подтверждение второго решения парадокса Бертрана методом «случайного радиуса» в среде математического конструктора: $P_{m>l} = 1/2$

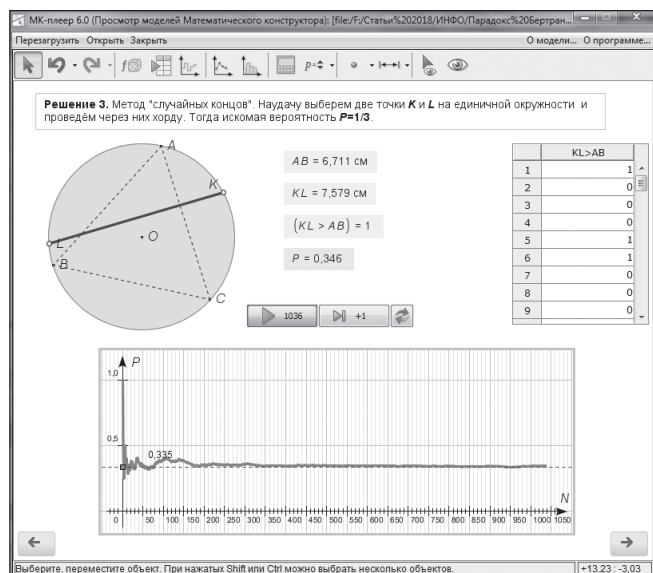


Рис. 9. Статистическое подтверждение третьего решения парадокса Бертрана методом «случайных концов» в среде математического конструктора:
 $P_{m>l} = 1/3$

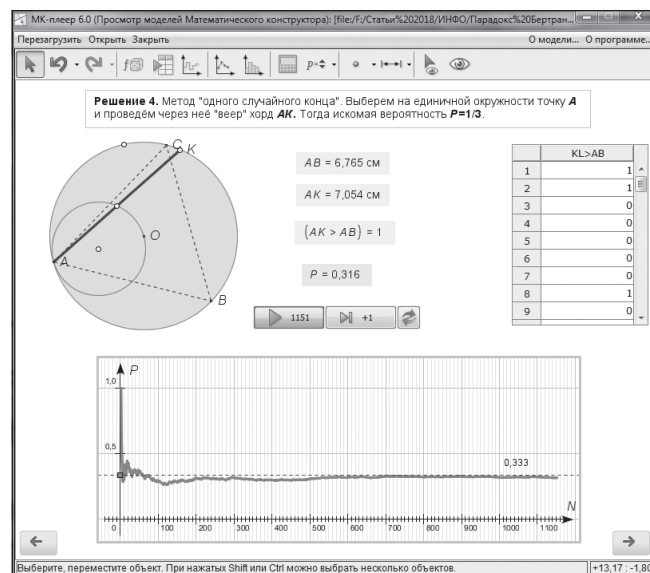


Рис. 10. Статистическое подтверждение четвертого решения парадокса Бертрана методом «одного случайного конца» в среде математического конструктора:
 $P_{m>l} = 1/3$

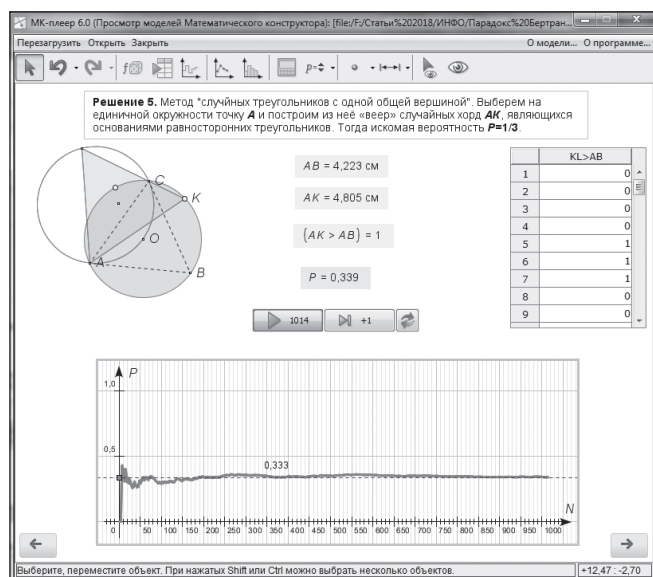


Рис. 11. Статистическое подтверждение пятого решения парадокса Бертрана методом «случайных треугольников» в среде математического конструктора:
 $P_{m>l} = 1/3$

экспериментов и графики зависимости $P_{m>l}$ от числа испытаний*.

Интересными оказались результаты сравнения зависимости вероятности $P_{m>l}$ от числа испытаний на начальных этапах (до 50) для третьего, четвертого и пятого методов разрешения парадокса Бертрана, которые со временем дают одинаковый результат: $P_{m>l} = 1/3$ (рис. 12). Учащиеся могут воочию на-

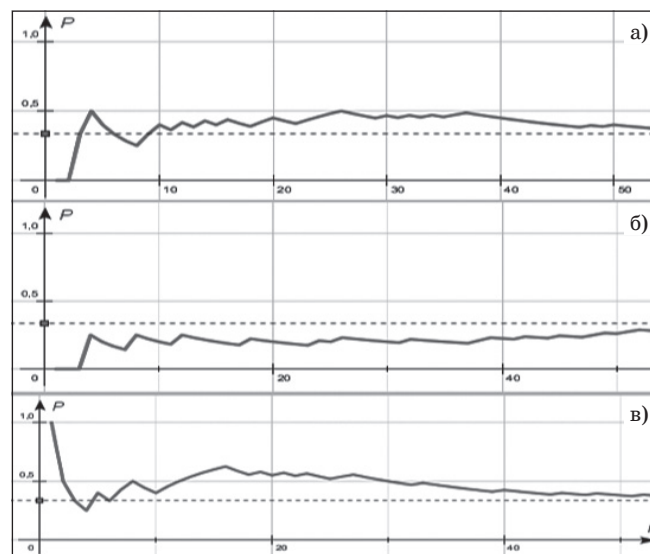


Рис. 12. Сравнение переходных процессов на начальных этапах (до 50 испытаний) третьего (а), четвертого (б) и пятого (в) способов решения парадокса Бертрана, протекающих с одинаковой вероятностью: $P_{m>l} = 1/3$ в среде математического конструктора

блюдать, что случайное расположение первой хорды существенным образом влияет на значение вероятности лишь в пределах первых 30–40 испытаний. Тогда как уже к 50–60-му испытанию значения вероятности выравниваются.

Выводы

Все приведенные решения парадокса Бертрана показывают, что ответ на вопрос: «Какова вероятность события, при котором $m > l$, если наступило событие m ?» не является заранее обусловленным. Многозначность ответа при решении парадокса Бертрана демонстрирует «экспериментальную природу математики» [2, с. 43–45], которая не поддается

* Автор выражает искреннюю благодарность Владимиру Александровичу Булычеву, доценту кафедры высшей математики Калужского филиала МГТУ им. Н. Э. Баумана, за помощь в проведении статистических экспериментов с помощью ресурса «1С:Математический конструктор 6.0».

традиционному принципу алгоритмизирования, введенному еще Евклидом, — путем строгой формализованной манеры записи математического доказательства.

Теория вероятностей (и, в частности, теория меры) допускает разное понимание случайного события, от которого зависит другое случайное событие, т. е. разные распределения вероятностей наступления начального события приводят к разным распределениям вероятностей наступления результирующего события: «определяется вероятность события в предположении, что выполняются некоторые заранее заданные условия» [3, с. 185].

Кроме того, парадокс Бертрана представляет собой классический пример **многовариантной задачи**, которая предполагает трансформацию подхода к решению, когда учащийся предпринимает попытку решить задачу разными способами, рассмотреть ее с разных сторон, использует различные аспекты в условии задачи. Такой подход позволяет запускать ассоциативные связи, которые имеют прямое или пусть даже отдаленное отношение к исходной задаче, — все равно это способствует припоминанию или подобных задач, или подобных способов действия. Эти действия поддерживают интерес учащегося к задаче, убирают усталость от поиска решения, способствуют концентрации внимания на существенных деталях задачи. Использование интерактивных творческих сред при решении такого рода задач усиливает возможности учащихся отойти от строго регламентированных способов математических рассуждений и добиться гибкости в их осуществлении путем обращения к потенциалу динамической визуализации и виртуальному эксперименту.

Опыт разрешения парадокса Бертрана показывает, что старшеклассники, независимо от уровня предметной подготовки и отвечающих ему целей учебно-познавательной деятельности, во-первых, осмысливают важность выдвижения гипотез при решении творческих, нестандартных задач, во-вторых, осознают, насколько значимыми являются первоначальные допущения, определяющие зада-

ную ситуацию в вероятностных задачах, которые обуславливают не только выбор способа, но и результат решения задачи, а в-третьих, учатся находить и разрешать противоречия, возникающие в процессе мыслительной деятельности.

Что касается инструментов электронной визуализации при решении вероятностных задач, которые по выполняемым функциям представляют собой поле для проведения виртуальных статистических экспериментов, то они становятся дополнительным эффективным источником формирования вариативности мышления. В результате их использования у учащихся складывается единая картина, которая позволяет подтвердить или опровергнуть выдвинутую гипотезу и доказать правомерность теоретических рассуждений, проводимых традиционными способами.

Кроме того, использование приемов динамической визуализации в целом и проведение виртуальных экспериментов в частности являются очевидным доказательством возможности и необходимости привлечения средств ИКТ на всех этапах решения математических задач, которые не должны осуществляться только традиционными методами, какими бы проверенными они ни были. Инструменты динамической визуализации, получившие свое начало с развитием ИКТ, должны естественным образом интегрироваться в учебный процесс на всех уровнях изучения математики в средней школе, тем более что их развитию и продвижению способствует выделение в основной образовательной программе для средних учебных заведений единой предметной области «Математика и информатика».

Список использованных источников

1. 1С:Математический конструктор 6.0. <http://obr.1c.ru/educational/uchenikam/mathkit/>
2. *Кранц С.* Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя проверить / пер. с англ. Н. А. Шиховой. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016.
3. *Халмош П.* Теория меры / пер. с англ. Д. А. Василькова; под ред. С. В. Фомина. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953.

Журнал «Информатика и образование»

Индексы подписки (агентство «Роспечать»)
на 2-е полугодие 2018 года

- 70423 — для индивидуальных подписчиков
- 73176 — для организаций

Периодичность выхода: 5 номеров в полугодие (в январе не выходит)

Редакционная стоимость:
индивидуальная подписка — 250 руб.
подписка для организаций — 500 руб.