

В. П. Зудин,

Областной многопрофильный техникум, р. п. Ардатов, Нижегородская область

РАЗВИТИЕ КРЕАТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ПОМОЩЬЮ НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧИСЛА ПИ*

Аннотация

В статье рассматривается актуальность точности вычисления площади круга и длины окружности, даны новые методы вычисления значения числа π с помощью программ на Visual Basic For Application.

Ключевые слова: число π , площадь круга, длина окружности, предельные переходы, циклические программы, Visual Basic For Application.

Значимость точности выполнения расчетов

Понятие точности имеет большое значение в производстве, учебе, быту, в целом в объективном окружающем нас мире. Еще в древние времена люди во время охоты должны были сообщать точно в требуемое время находить добычу, чтобы обеспечить пропитание, а следовательно, саму жизнь своего племени. Добыча, конечно, при этом сопротивлялась, и неумелые неточные методы охоты могли привести к тому, что люди сами становились жертвами зверей.

В наше время при обобществлении труда в семье, на производстве, в учебных заведениях, в государстве и между государствами понятие «точность» имеет гораздо большее значение и без точности общество не может существовать при высоком жизненном уровне. При разделении людей на племена, а затем и на государства между ними происходили конфликты из-за территорий, природных ресурсов, политических амбиций, что приводило к локальным войнам и войнам мировым. Во время военных действий стали применять оружие для уничтожения людей, оружие массового поражения всего живого и неживого, средств самообороны у противника. Во время применения такого оружия требуется точный быстрый расчет для достижения цели, так как при замедленном и неточном выполнении боевого

задания запасы боеприпасов исчезают, время теряется, а территория противника остается сохранной. При неквалифицированном или некачественном применении вооружения противник с точным и более качественным оружием нападения может уничтожить противоположную сторону в более короткий срок.

При более точном изготовлении деталей, из которых затем собираются узлы, агрегаты, приборы, получаются изделия лучшего качества, большей продолжительности времени использования и отличного дизайна. Изготовление деталей, выполнение работ требуют разработки формул, методов измерения, создания измерительных инструментов определенной точности.

Для измерения площадей прямоугольной формы, чтобы сравнивать их в количественном отношении при проведении сельскохозяйственных работ, строительстве объектов и других мероприятиях приняли абстрактную величину, равную произведению длины на ширину части плоскости, и условились единицей измерения этой величины считать квадрат со стороной, длина которой равна единице.

Определение по этому принципу площадей фигур круглой формы вызывает некоторое затруднение, так как у таких фигур границей является окружность, у которой нет длины и ширины, как у прямоугольника. Это затруднение стали преодолевать,

* Материалы к статье можно скачать на сайте ИНФО: http://infojournal.ru/journals/school/info_10-2017/

Контактная информация

Зудин Василий Павлович, преподаватель математики и информатики Областного многопрофильного техникума, р. п. Ардатов, Нижегородская область; адрес: 607130, Нижегородская область, р. п. Ардатов, ул. Садовая, д. 9; телефон: (83179) 5-31-34; e-mail: vpz@mts-nn.ru

V. P. Zudin,

Regional Multifunctional Technical School, Ardatov, Nizhny Novgorod Region

DEVELOPMENT OF CREATIVE THINKING OF STUDENTS BY NON-STANDARD METHODS OF CALCULATING NUMBER PI

Abstract

The article considers the relevance of the accuracy of calculating the square of a circle, circumference, and gives new methods for computing the value of a number π using programs in Visual Basic For Application.

Keywords: number π , square of circle, circumference, limit transitions, cycle algorithms, Visual Basic For Application.

обнаружив, что отношение длины любой окружности к ее диаметру есть величина постоянная. Эта величина равна бесконечному иррациональному числу 3,141592..., которое обозначили символом π .

Производить замер длины окружности с достаточной точностью гораздо сложнее, чем осуществлять проверку длины ее диаметра, поэтому с помощью абстрактной формулы $l = 2\pi r$ стали определять ее длину. В этой формуле l — длина окружности, π — постоянное число, данное выше, r — радиус окружности, равный половине ее диаметра.

Площадь круга определяют, используя число π , несколькими методами.

Первый метод заключается в том, что правильный многоугольник описывают окружностью и увеличивают количество его сторон до предельного перехода, когда длина периметра многоугольника будет равна длине окружности. В этом случае площадь правильного многоугольника и площадь круга будут равны. Площадь многоугольника легко определяется путем суммирования площадей треугольников, на которые он разбивается. Для определения площади треугольника существует множество формул. После предельных преобразований получается, что площадь круга определяется по формуле $S = \pi r^2$, где S — площадь круга, π — постоянное число, данное выше, r — радиус круга.

Вторым методом назовем вычисление площади круга с помощью определенного интеграла:

$$S = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

где заменяем:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin \alpha, \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ dx &= R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha. \end{aligned}$$

В обоих случаях — и при определении площади круга, и при определении длины окружности — используется число π , поэтому точность определения числа π имеет большое значение.

Рассмотрим окружность с центром в начале координат. Каким уравнением задается эта окружность? $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда ее часть, расположенная выше оси абсцисс, есть график функции:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

где $-R \leq x \leq R$.

Используя геометрический смысл определенного интеграла, площадь круга радиуса R определяем по формуле:

$$S = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Вычислим этот интеграл, пользуясь заменой переменной: $x = R \sin \alpha$. При возрастании переменной x от $-R$ до R переменная α изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Находим новые пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ \cos \alpha &\geq 0, \\ dx &= R \cos \alpha \cdot d\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha} \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \\ &= R^2 \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) = \pi R^2. \end{aligned}$$

Получили формулу определения площади круга: $S = \pi R^2$.

Ниже будет дано более простое, наглядное определение числа π новым методом с помощью циклической программы на языке Visual Basic For Application для Microsoft Excel.

Определение площади круга путем разбиения его на прямоугольники, внутри которых содержится круг

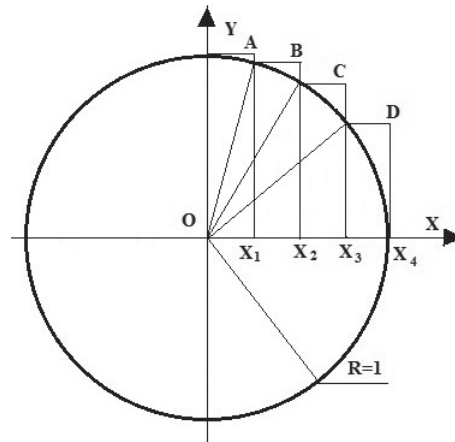


Рис. 1

На рисунке 1 дан круг с центром в начале координат и радиусом $R = 1$. Разобьем данный круг на четыре равные части, а затем четвертую часть круга закроем прямоугольниками так, что нижняя их сторона будет лежать на оси OX , левый верхний угол прямоугольников сверху касается границы круга. Высоты прямоугольников перпендикулярны оси OX и параллельны оси OY . Соседние боковые стороны прямоугольников лежат на одной прямой.

Согласно нашему рассуждению и построению на рисунке 1, видно, что сумма площадей прямоугольников будет близка к площади одной четвертой круга, но будет больше ее, так как четвертая часть круга лежит внутри этих прямоугольников. Ширину каждого прямоугольника задаем одной и той же величины, а высоту вычисляем по теореме Пифагора.

Высоты прямоугольников будут вычисляться по формуле:

$$f(x_n) = h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2},$$

где R — радиус круга, а x_n — абсцисса вершин левых верхнего или нижнего углов прямоугольников.

Площадь каждого прямоугольника S_n будет равна произведению:

$$S_n = \sqrt{R^2 - x_n^2} \cdot (x_n - x_{n-1}).$$

В этой формуле первый множитель — высота прямоугольника, которая будет иметь свою величину у каждого прямоугольника в зависимости от его расстояния до центра круга, что дано выше. Вторым множителем есть ширина прямоугольника, которую задаем для всех прямоугольников равной величины так, чтобы длины прямоугольников были кратными радиусу круга. Радиус круга задаем $R = 1$ (равным линейной единице), а ширину каждого прямоугольника берем $x_n - x_{n-1} = 10^{-n}$.

Площадь круга будет примерно равна сумме площадей всех прямоугольников, умноженной на число 4, так как таких частей в круге будет четыре, или же необходимо будет умножить площадь каждого прямоугольника на четыре, а затем сложить все полученные площади для получения требуемого результата.

Число π будет равно площади круга из формулы $S = \pi R^2$ — мы приняли радиус круга равным единице, и, значит, $S = \pi$.

Путем нескольких вычислений, уменьшая каждый раз ширину прямоугольников, проведем анализ результатов площадей и величины числа π и сравним с его принятой в настоящее время величиной. Это даст нам возможность говорить о точности числа π и о точности работы компьютера.

Радиус R при всех испытаниях будет величиной постоянной: $R = 1$, а ширина всех прямоугольников в каждом испытании будет уменьшаться со знаменателем геометрической прогрессии $0,1$ от 10^{-1} до 10^{-9} . При ширине прямоугольников 10^{-9} можно будет говорить о более точном вычислении площади круга и числа π .

Из наших рассуждений выше видно, что здесь можно рассматривать функцию, у которой аргумент задан дискретной величиной, имеющей вид арифметической прогрессии. Так, для первой функции примем следующую арифметическую прогрессию: первый член арифметической прогрессии и первое значение аргумента функции $a_1 = x_1 = 0$, разность арифметической прогрессии, т. е. шаг аргумента:

$$d = x_n - x_{n-1} = 10^{-1} = 0,1.$$

Конечный член арифметической прогрессии a_{nk} , т. е. наибольшее значение аргумента x_{nk} , согласно рисунку 1 должен быть равен:

$$R - d = R - (x_n - x_{n-1}).$$

Для нашего первого условия конечный член арифметической прогрессии, т. е. наибольшее значение аргумента, будет равен:

$$a_{nk} = x_{nk} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Это значение аргумента можно вычислить по формуле значения определенного члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

где:

a_n — искомый член арифметической прогрессии, в нашем случае последний член арифметической прогрессии;

a_1 — первый член арифметической прогрессии;
 n — количество членов арифметической прогрессии;

d — разность арифметической прогрессии.

Для заданной выше арифметической прогрессии:

$$a_1 = x_1 = 0;$$

$$d = 10^{-1} = 0,1;$$

$$n = \frac{1}{10^{-1}} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Подставив все эти данные в формулу вычисления определенного члена арифметической прогрессии, получим искомую величину последнего члена заданной арифметической прогрессии:

$$a_{nk} = x_{nk} = 0 + (10 - 1) \cdot 0,1 = 0,9.$$

При каждом значении аргумента, члене арифметической прогрессии вычисляются две функции. Сначала определяется длина левой стороны данного прямоугольника:

$$f(x_n) = h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2},$$

а затем вычисляется площадь заданного прямоугольника:

$$S(x_n) = h(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1}).$$

После вычисления функции площади прямоугольника определяется значение третьей функции — сумма двух слагаемых: площади данного прямоугольника и суммарной площади предыдущих прямоугольников. После сложения площадей всех прямоугольников полученная сумма умножается на 4, так как таких четвертей в круге четыре. Полученная величина будет примерно равна площади круга и значению числа π , так как при принятом нами радиусе круга $R = 1$ площадь круга и число π будут равны из формулы площади круга $S = \pi R^2$.

$$S1 = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n + \dots + S_{nk}) \cdot 4 = \pi.$$

Конечным результатом будет сумма площадей всех прямоугольников круга при заданной разности арифметической прогрессии, т. е. ширине каждого прямоугольника. Эта величина будет несколько больше площади круга и не намного больше «школьного» значения числа $\pi \approx 3,14$.

Но с уменьшением разности арифметической прогрессии, т. е. ширины прямоугольника, до 10^{-9} сумма площадей прямоугольников, площадь круга и «школьное» число π примерно сравняются.

Рассмотрим последнее планируемое вычисление при:

$$d = x_n - x_{n-1} = 10^{-9};$$

$$h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2},$$

$$S(x_n) = h(x_n) \cdot 10^{-9}.$$

Согласно рисунку 1, последний член этой арифметической прогрессии, или максимальное значение аргумента, будет равен:

$$a_{nk} = x_{nk} = (1 - 10^{-9}) = 0,999999999.$$

Это значение аргумента можно получить по формуле для вычисления определенного члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Для заданной арифметической прогрессии:

$$a_1 = x_1 = 0;$$

$$d = 10^{-9} = 0,000000001;$$

$$n = \frac{1}{10^{-9}} = \frac{1}{0,000000001} = 1\,000\,000\,000.$$

Подставив все эти данные в формулу для вычисления определенного члена арифметической прогрессии, получим искомую величину последнего члена данной арифметической прогрессии:

$$a_{nk} = x_{nk} =$$

$$= 0 + (1\,000\,000\,000 - 1) \cdot 0,000000001 = 0,999999999.$$

При каждом значении аргумента x_n вычисляются две функции. Сначала определяется длина левой стороны прямоугольника, а затем находится площадь данного прямоугольника. После этого производится сложение площади данного прямоугольника с суммарной площадью предыдущих прямоугольников. Сумма всех площадей прямоугольников умножается на 4, так как таких четвертей в круге четыре. Полученная сумма будет равна площади круга и при принятом нами радиусе круга $R = 1$ числу π :

$$S1 \approx (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n + \dots + S_{nk}) \cdot 4 \approx \pi.$$

В этой формуле $S1 \approx \pi \cdot R^2 \approx \pi \cdot 1 \approx \pi$.

Этот алгоритм переведен ниже на язык Visual Basic For Application в Microsoft Excel. Результаты работы алгоритма можно проанализировать с помощью таблицы 1.

Определение площади круга путем разбиения его на прямоугольники, которые находятся внутри круга

Аналогично рисунку 1 построим рисунок 2 для определения площади круга с помощью прямоугольников.

Во втором алгоритме будем рассматривать такие прямоугольники, которые нижней своей стороной (шириной) лежат на оси OX , а правой верхней вершиной касаются границы круга (окружности) в первой четверти круга. Такие прямоугольники будут лежать

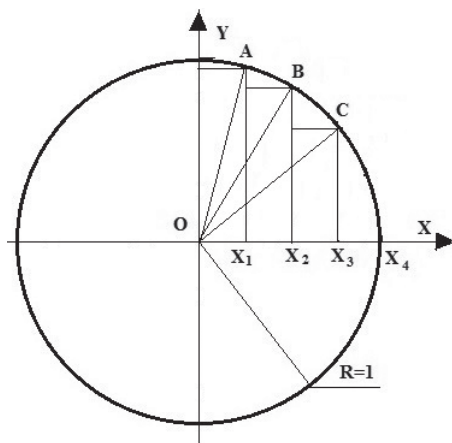


Рис. 2

внутри круга, боковые стороны (высоты) соседних прямоугольников проходят через одну прямую. Сумма площадей таких прямоугольников будет близка к площади одной четвертой части круга, и с уменьшением их ширины количество прямоугольников для заполнения первой четверти круга увеличивается, а сумма площадей таких прямоугольников приближается к истинной площади четвертой части круга.

Ширину прямоугольников берем кратной радиусу круга, начиная от 0,1. При следующих испытаниях уменьшаем ширину прямоугольника по геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1} до 10^{-9} . При ширине прямоугольников, равной 10^{-9} , сумма их площадей, умноженная на 4, даст более точное значение площади заданного круга и величины числа π . Согласно заданному алгоритму, сумма площадей данных прямоугольников никогда не будет больше площади четвертой части круга, так как прямоугольники лежат внутри круга. При определенной ширине прямоугольников сумма их площадей будет совпадать с площадью четвертой части круга. Самую малую ширину прямоугольников зададим равной 10^{-9} .

При этой ширине прямоугольников сумма их площадей, умноженная на 4, будет приближаться по величине к площади круга, определенной с помощью принятой в настоящий период формулы $S = \pi R^2$.

Высота каждого прямоугольника вычисляется по теореме Пифагора. Например, для первого прямоугольника:

$$h_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2},$$

для второго прямоугольника:

$$h_2 = \sqrt{R^2 - x_2^2},$$

и общая формула определения высоты прямоугольников:

$$f(x_n) = h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2},$$

В этих формулах:

x_n — абсциссы правых вершин углов прямоугольников;

R — радиус круга;

$h(x_n)$ — длина правых боковых сторон прямоугольников.

Ширина прямоугольников задается при каждом опыте от 10^{-1} до 10^{-9} . Отсюда следует, что площадь каждого прямоугольника равна:

$$S_n = \sqrt{(R^2 - x_n^2)} \cdot (x_n - x_{n-1}).$$

В этой формуле:

R — радиус круга, который мы приняли равным 1;

x_n — абсцисса вершины правого угла прямоугольника;

$(x_n - x_{n-1})$ — ширина прямоугольника, которая для каждого опыта имеет постоянную величину и изменяется от опыта к опыту в геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1} . Минимальное ее значение принимаем равным 10^{-9} в последнем опыте.

Область определения функции $f(x_n) = h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2}$, согласно рисунку 2, является дискретной величиной, и ее можно рассматривать как арифметическую прогрессию. В этой прогрессии для первого опыта примем:

$$a_1 = x_1 = 0,1,$$

$$d = 0,1,$$

последний член прогрессии будет равен:

$$a_{nk} = x_{nk} = 1.$$

Общее количество членов данной арифметической прогрессии в этом опыте будет равно:

$$n = \frac{R}{d} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Используя эти данные, величину последнего члена арифметической прогрессии можно рассчитать по формуле вычисления значения определенного члена арифметической прогрессии:

$$x_{nk} = a_{nk} = a_1 + (n - 1) \cdot d = 0,1 + (10 - 1) \cdot 0,1 = 1.$$

Описание данной формулы дано выше при рассмотрении алгоритма для рисунка 1.

При каждом значении аргумента вычисляются две функции. Сначала определяется длина правой стороны прямоугольника по формуле:

$$f(x_n) = h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2},$$

затем находится площадь данного прямоугольника произведением:

$$S_n = \sqrt{R^2 - x_n^2} \cdot (x_n - x_{n-1}) = h(x_n) \cdot 0,1.$$

После вычисления площади прямоугольника ее величину надо сложить с суммарной площадью предыдущих прямоугольников. Сумму площадей всех полученных прямоугольников необходимо умножить на 4, так как таких четвертей в круге четыре. В нашем примере при $R = 1$ площадь круга и число π будут равны на основании формулы площади круга:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot 1 = \pi.$$

$$S2 \approx (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n + \dots + S_{nk}) \cdot 4 \approx \pi.$$

В последнем опыте берется значение ширины прямоугольников постоянной величины:

$$d = x_n - x_{n-1} = 10^{-9} = 0,000000001.$$

При этой величине d сумму площадей прямоугольников $S2$ можно будет считать примерно равной сумме площадей $S1$ первого алгоритма для рисунка 1. Площади $S2$ и $S1$ будут приближаться к площади данного круга S , т. е. значению числа π , принятому в настоящее время. Число таких прямоугольников будет равно (согласно рисунку 2):

$$n = \frac{R}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{0,000000001} = 1\,000\,000\,000.$$

Высота каждого прямоугольника будет определяться по формуле:

$$f(x_n) = h(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2} = \sqrt{1 - x_n^2}.$$

У данной функции аргумент — дискретная величина, которая соответствует арифметической прогрессии. Значение первого члена этой прогрессии, первого аргумента будет равно:

$$a_1 = x_1 = d = x_n - x_{n-1} = 0,000000001 = 10^{-9}.$$

Величина последнего члена арифметической прогрессии, аргумента данной функции, достигнет

величины радиуса круга, в нашем случае $R = 1$. Последний член прогрессии можно рассчитать по формуле:

$$x_{nk} = a_{nk} = a_1 + (n - 1) \cdot d = 0,000000001 + (1\,000\,000\,000 - 1) \cdot 0,000000001 = 1.$$

При каждом значении аргумента вычисляется площадь прямоугольника по формуле:

$$S(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2} \cdot (x_n - x_{n-1}) = h(x_n) \cdot 0,000000001.$$

После вычисления площади прямоугольника ее величина складывается с суммарной площадью предшествующих прямоугольников. Затем сумма всех площадей прямоугольников четвертой части круга умножается на 4, так как четвертей в круге четыре, и получается конечный результат — величина числа $\pi \approx S2$.

$$S2 = (S_1 + S_2 + \dots + S_{nk}) \cdot 4 \approx \pi.$$

Аналогичные расчеты площади круга и числа π проводятся для всех опытов в циклической программе на языке Visual Basic For Application в Microsoft Excel. Результаты работы программы приведены в таблице 1.

Программа на Visual Basic For Application в Microsoft Excel определения числа π с помощью вычисления площади единичного круга

После разработки алгоритмов составляем программу на языке Visual Basic For Application в Microsoft Excel для определения площади круга и числа π (здесь и в последующих программах номера строк не имеют непосредственного отношения к программе и представлены для удобства последующего обсуждения).

```

1 Public Sub Число_пи ()
2 Dim X1 As Double
3 Dim X2 As Double
4 Dim S1 As Double
5 Dim S2 As Double
6 Dim R As Double
7 S1 = 0
8 S2 = 0
9 R = 1
10 t = 0.1
11 For X1 = 0 To 1 - t Step t
12 S1 = S1 + Sqr(R ^ 2 - X1 ^ 2) * t
13 Next X1
14 For X2 = t To 1 Step t
15 S2 = S2 + Sqr(R ^ 2 - X2 ^ 2) * t
16 Next X2
17 S3 = S1 * 4
18 S4 = S2 * 4
19 MsgBox "П1=" & S3 & " " & "П2=" & S4,
vbYesNo, "Величина числа ПИ"
20 Лист1.Cells(2, 1) = t
21 Лист1.Cells(2, 2) = S3
22 Лист1.Cells(2, 3) = S4
23 End Sub

```

В этой программе первая строка сообщает название программы и ее видимость в проекте, во второй и третьей строках переменным величинам — координатам вершин прямоугольников на оси OX соответственно для первого и второго условий $X1$ и $X2$ — задаются значения действительных чисел двойной точности. Четвертая и пятая строки со-

общают, что переменные $S1$ и $S2$ — действительные числа двойной точности, которые определяют площадь прямоугольников для первого и второго условий. Шестая строка извещает о радиусе круга, в ней радиусу придается значение действительных чисел двойной точности. В седьмой и восьмой строках первоначально присваивается значение площадей прямоугольников, равное нулю для обоих условий. В девятой строке радиусу круга присваивается единичное значение. Десятая строка задает переменную t (ширину прямоугольника). Величина этой переменной изменяется пользователем согласно таблице 1. Таблица 1 дана ниже, а величина t из этой таблицы вводится перед запуском программы. Программа запускается нажатием клавиши F5. Одиннадцатая строка — начало первой циклической программы: здесь задается абсцисса левого угла первого прямоугольника равной 0, она будет увеличиваться с шагом $Step = t$ до $1 - t$. В двенадцатой строке вычисляется площадь одного прямоугольника, после чего производится ее сложение с площадями предыдущих прямоугольников. Тринадцатая строка сообщает о конце циклической программы и передает управление в начало данной программы до конца выполнения цикла, после управления передается на нижнюю за ней строку. Четырнадцатая, пятнадцатая и шестнадцатая строки задают аналогичную циклическую программу для решения задачи со вторым условием после выполнения первой циклической программы. Четырнадцатая строка — начало второй циклической программы — задает абсциссу правого угла первого прямоугольника равной t , она будет увеличиваться с шагом $Step = t$ до 1. Пятнадцатая строка вычисляет площадь одного прямоугольника с заданной абсциссой $X2$ его правого угла и складывает полученную площадь с площадью предыдущих прямоугольников. Шестнадцатая строка переводит действие программы в начало цикла до полного его выполнения, после полного выполнения цикла управление передается в нижнюю за ней семнадцатую строку. В семнадцатой и восемнадцатой строках площади одной четверти круга соответственно первого и второго циклов умножаются на 4, так как, согласно рисункам 1 и 2,

в кругах четыре четверти. Девятнадцатая строка выводит результат работы циклических программ через сообщающееся окно MsgBox. Двадцатая строка выводит величину ширины прямоугольника в ячейку (2, 1). Двадцать первая строка сообщает величину площади круга, числа $\pi 1$, согласно заданию рисунка 1, в ячейку Excel (2, 2). Двадцать вторая строка дает результат величины площади, числа $\pi 2$, в соответствии с заданием рисунка 2. Двадцать третья строка заканчивает работу всей программы.

Запустить эту программу можно клавишей F5 с клавиатуры компьютера, когда курсор мыши находится на одной из строк кода программы. Код программы открывается при выборе в меню пунктов *Разработчик, Visual Basic For Application*. При отсутствии кода программы необходимо выбрать *View, Project Explorer*, где необходимо найти *Module1* и открыть его.

В таблице 1 даны результаты вычисления числа π (площади круга радиусом 1), найденные с помощью суммирования площадей прямоугольников и циклической программы, приведенной выше, на языке Visual Basic For Application в Microsoft Excel, согласно рисункам 1 и 2. Напомним, что число π в школьных учебниках принимается равным: $\pi = 3,141592653589790$.

Из таблицы 1 видно, что при ширине прямоугольника 0,1 на первой строке таблицы число $\pi 1 > \pi > \pi 2$. Такие результаты мы предсказывали выше, так как площадь прямоугольников первого задания (см. рис. 1) содержит площадь круга и площадь прямоугольников второго задания (см. рис. 2), поэтому явно должны быть такие результаты. Эти результаты говорят о точности работы алгоритма, правильности программы и достаточной точности вычислений. Аналогичные результаты видны при ширине прямоугольников от 0,1 до 0,00000001.

Из таблицы 1 видно, что при ширине прямоугольника $x_n - x_{n-1} = 0,00000001$ значения числа π совпадают в восьми знаках:

$$\pi 1 = 3,14159266825513,$$

$$\pi = 3,14159265358979,$$

$$\pi 2 = 3,1415926282601.$$

Таблица 1

Ширина прямоугольников для обоих заданий, величина t в программе	Число $\pi 1$ — площадь единичного круга, вычисленная через внешние прямоугольники (рис. 1)	Число $\pi 2$ — площадь единичного круга, вычисленная через внутренние прямоугольники (рис. 2)
0,1	3,30451832624832000	2,90451833220878000
0,01	3,15477433738718000	3,12041703177905000
0,001	3,14337662619978000	3,13955546691103000
0,0001	3,14179147761159000	3,14139147778486000
0,00001	3,14161261640622000	3,14157261648453000
0,000001	3,14159464674549000	3,14159065240232000
0,0000001	3,14159285414780000	3,14159245415674000
0,00000001	3,14159266825513000	3,14159262826010000
0,000000001	3,14159266568015000	3,14159266168027000
0,0000000001	3,14159244683003000	3,14159244643004000

Такой результат говорит о том, что возможно сообщать учащимся на уроках информатики и математики данный более наглядный и простой способ получения числа π для практических целей. Этот способ предлагает новый альтернативный метод получения числа π , что развивает у обучающихся творческое мышление.

При уменьшении ширины прямоугольника до $10^{-9} = 0,000000001$ величины чисел π_1 и π_2 должны сближаться между собой и приближаться к числу π .

Из таблицы 1 видно, что при $x_n - x_{n-1} = 0,000000001$ числа π_1 и π_2 равны между собой в девяти знаках:

$$\pi_1 = 3,14159266568015,$$

$$\pi_2 = 3,14159266168027.$$

Числа π_1 и π_2 по величине стали гораздо ближе друг к другу по сравнению с предыдущим вычислением, что оправдывает наше логическое предположение.

«Школьное» $\pi = 3,14159265358979$ при этом вычислении к числам π_1 и π_2 также приблизилось — разность между π_1 и π при этом вычислении:

$$\pi_1 - \pi = 0,00000001209036.$$

Разность между π_2 и π также получилась положительной:

$$\pi_2 - \pi = 0,000000008090480.$$

Но положительной разности между π_2 и π не должно быть, так как на рисунке 2 площадь прямоугольников находится внутри площади круга. Отсюда следует, что число π_2 должно быть меньше или равно π : $\pi_2 \leq \pi$.

Это противоречие позволяет предполагать, что по рассматриваемому алгоритму необходимо вычислять число π с точностью до восьми знаков, когда противоречия не возникают, что было показано выше.

Также можно предположить, что для более точного вычисления числа π по рассматриваемому алгоритму необходим более совершенный компьютер, или же принимаемое школьное значение числа π после восьми знаков будет иметь другое значение.

Из таблицы 1 видно, что при ширине прямоугольников $10^{-10} = 0,0000000001$ числа π_1 и π_2 стали равными до десятого знака:

$$\pi_1 = 3,14159244683003,$$

$$\pi_2 = 3,14159244643004.$$

То есть площади прямоугольников π_1 и π_2 , где π_1 содержит площадь круга, а π_2 находится в площади круга, стали приближаться по величине друг к другу. И такой результат был ожидаем.

Но в то же время он оказался и неожиданным: оба числа π_1 и π_2 по величине оказались меньше «школьного» значения числа π :

$$\pi = 3,14159265358979.$$

То есть $\pi_1 < \pi$, чего не должно быть.

Это противоречие необходимо ликвидировать, и решение этой проблемы можно предложить учащимся для самостоятельной работы. Такой подход к вычислению числа π развивает креативное мышление, активизирует познавательную деятельность учащихся и прививает любовь к умственному труду.

Программа на Visual Basic For Application в Word 2010

В Microsoft Word 2010 можно представить программу, аналогичную той, которая дана выше для Visual Basic For Application в программе Excel.

Программа работает в диалоговом режиме. Ее запуск осуществляется щелчком мыши на ленте по закладке *Разработчик*, далее щелчком на ПИ — для «школьного» значения, на ПИ1 — для наибольшего значения, ПИ2 — для наименьшего значения. После запуска программы появится окно для ввода ширины прямоугольников, в котором описано, как все выполнять для достижения результата. Для запуска таким способом данной программы в Word 2010 необходимо на ленте Word 2010 выбрать закладку *Разработчик*, файл сохранить с поддержкой макросов и на ленте создать указанные выше команды ПИ, ПИ1, ПИ2. Правила выполнения этого способа запуска программы можно изучить в Интернете. После выполнения задания окна ввода данных через определенное время появится результат программы с различными значениями числа π . При вводе большой, равной $10^{-1} = 0,1$ ширины прямоугольника программа быстро выдаст результат низкой точности. При вводе малой ширины прямоугольника, равной $10^{-9} = 0,000000001$ результат придется ждать несколько минут, но результат будет более точный. Данную программу также можно запустить клавишей F5, когда курсор мышки находится внутри кода программы. Код программы можно посмотреть, выбрав в меню пункт *Разработчик*, *Visual Basic For Application*. Если код программы не появился, то необходимо в окне *Visual Basic For Application* выбрать *View*, *Project Explorer*, в окне *Project(Microsoft Word) — Module1*.

```

1 Public Sub Число_ПИ ()
2 Dim X1 As Double
3 Dim X2 As Double
4 Dim S1 As Double
5 Dim S2 As Double
6 Dim t As Double
7 Dim R As Double
8 S1 = 0
9 S2 = 0
10 R = 1
11 t = Val(InputBox("Введите ширину прямоуголь-
ника от 0.1 до 0.000000001. При каждом следу-
ющем вводе умножайте величину предыдущего
ввода на 0.1. Дробную часть отделяйте точкой.
Чем меньше ширина прямоугольника, тем точнее
значение числа ПИ и дольше работает програм-
ма. При ширине 0.000000001 программа работает
15 минут."))
12 For X1 = 0 To R - t Step t
13 S1 = S1 + Sqr(1 - X1 ^ 2) * t
14 Next X1
15 For X2 = t To R Step t
16 S2 = S2 + Sqr(1 - X2 ^ 2) * t
17 Next X2
18 S3 = S1 * 4
19 S4 = S2 * 4
20 S5 = 3.14159265358979
21 MsgBox "Ширина прямоугольника =" & t &
Chr(13) _
& "Число школьное ПИ =" & S5 & Chr(13) _
& "Число наибольшее ПИ1 =" & S3 & Chr(13) _
& "Число наименьшее ПИ2 =" & S4, vbYesNo,
"Величина числа ПИ"
25 End Sub

```

Данная программа на VBA в Word аналогична программе для VBA в Excel, которая приведена выше. Программа на VBA для Word отличается тем, что в нее включены новые операторы для диалогового режима и отключен вывод результата в ячейки, которые есть в Excel, но не имеются в Word. Строка 11 данной программы при работе выводит пользователю окно ввода данных. Строки 21–24 выводят результат работы программы.

Вычисление числа π программой на VBA в Excel и Word с использованием свойств длины окружности и площади круга, определяемых суммой длин хорд окружности и суммой площадей трапеций

На рисунке 3 дан круг с центром в начале координат, первая четверть которого разбита на прямоугольные трапеции так, что одна боковая сторона лежит на оси OX , а другая боковая сторона является хордой границы круга. Основания трапеции перпендикулярны оси OX и параллельны оси OY , соседние основания трапеций проходят через одну линию.

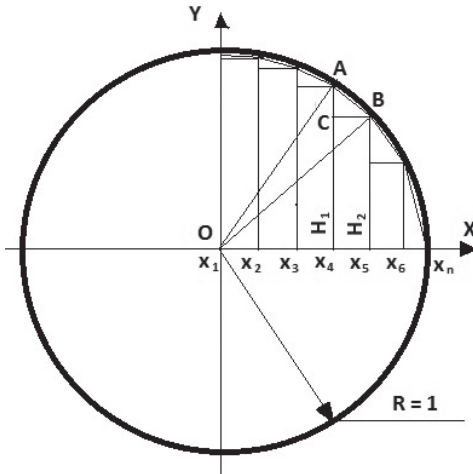


Рис. 3

Количество трапеций при каждом опыте берем разное, уменьшая высоту трапеций. В каждом опыте высота всех трапеций будет одинаковой и равной $x_2 - x_1 = x_n - x_{n-1}$. Задаем эту величину от 0,1 до 0,000000001, т. е. от 10^{-1} до 10^{-9} . При каждом последующем опыте умножаем предыдущую высоту на 0,1. Отсюда следует, что высота трапеций уменьшается в геометрической прогрессии со знаменателем 0,1. При этом боковая сторона трапеции (хорда круга) будет принимать форму, близкую к границе круга (окружности), а сумма площадей трапеций приближается к площади одной четвертой круга.

Рассмотрим на рисунке 3 треугольник ABC . В нем сторона $BC \parallel OX$, т. е. $\triangle ABC$ — прямоугольный. Длины катетов BC и AC :

$$BC = x_5 - x_4 = x_n - x_{n-1};$$

$$AC = H_4 - H_5 = f(x_4) - f(x_5) = f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

На основании построения (см. рис. 3) треугольники AOx_4 и BOx_5 — прямоугольные, поэтому значение функции $f(x_n)$ можно найти по теореме Пифагора:

$$AC = f(x_4) - f(x_5) = \sqrt{R^2 - x_4^2} - \sqrt{R^2 - x_5^2}.$$

Длину хорды AB также найдем по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}, \text{ где } AC \text{ и } BC \text{ нашли выше.}$$

Область определения функции $f(x_n)$ является дискретной величиной и, согласно рисунку 3, рассматривается как арифметическая прогрессия. Первый член этой прогрессии:

$$a_1 = x_1 = 0.$$

Последний член будет равен:

$$R - (x_n - x_{n-1}) = 1 - 0,1 = 0,9,$$

где R — радиус круга.

На рисунке 3 $R = 1$. При таком значении радиуса площадь круга будет равна числу π согласно формуле:

$$S_{\text{круга}} \approx \pi \cdot R^2 \approx \pi \cdot 1 \approx \pi.$$

Длина окружности при этом радиусе определится по формуле:

$$L_{\text{окружности}} \approx 2\pi \cdot R \approx 2\pi \cdot 1 \approx 2 \cdot \pi.$$

Количество трапеций и, соответственно, количество членов арифметической прогрессии для первого опыта будет равно:

$$n = \frac{R}{(x_n - x_{n-1})} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Разность арифметической прогрессии d для первого вычисления π приняли выше $d = 0,1$. Зная первый член арифметической прогрессии и количество ее членов, последний член $a_{nk} = x_{nk}$ найдем по формуле значения любого члена этой прогрессии:

$$a_{nk} = x_{nk} = x_1 + (n - 1) \cdot d = 0 + (10 - 1) \cdot 0,1 = 0,9.$$

После определения длины хорды AB , что дано выше, аналогично находятся длины всех хорд, предварительно их длины складываются с суммой предшествующих длин хорд. Общая сумма хорд примерно будет равна одной четвертой длины окружности. Интуитивно видно, что при уменьшении разности арифметической прогрессии слагаемых длин хорд будет больше, вычислительный процесс станет дольше, а общая сумма длин хорд должна приближаться к длине одной четвертой окружности. Отсюда сумма длин хорд, умноженная на 4, будет примерно равна длине окружности с радиусом $R = 1$:

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + L_{nk}) \cdot 4 \approx L_{\text{окружности}} \approx 2 \cdot \pi,$$

$$\pi \approx (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + L_{nk}) \cdot 2.$$

Данный выше алгоритм для нахождения числа π с помощью длины окружности будет выполнять компьютер на языке Visual Basic For Application. Результаты вычисления даны в таблице 2.

После определения числа π с помощью длины окружности на основании рисунка 3 можно разработать алгоритм для нахождения числа π путем определения общей площади четвертой части круга суммированием площадей трапеций. Основания трапеций находятся из прямоугольных треугольников Ox_nA_n по теореме Пифагора:

$$f(x_n) = \sqrt{R^2 - x_n^2},$$

$$f(x_{n+1}) = \sqrt{R^2 - x_{n+1}^2}.$$

Высоты у всех трапеций будут равны разности арифметической прогрессии $x_n - x_{n-1}$ и для первого опыта $d = \Delta x = 10^{-1} = 0,1$. Площадь трапеции равна произведению полсуммы оснований на высоту, в нашем случае:

$$S_{\text{тр}} = \frac{\sqrt{R^2 - x_n^2} + \sqrt{R^2 - x_{n+1}^2}}{2} \cdot (x_{n+1} - x_n) = \frac{H_1 + H_2}{2} \cdot \Delta x.$$

Количество таких трапеций, начальное и конечное значения аргумента были определены выше. После вычисления площади трапеции ее величина складывается с суммой площадей предшествующих трапеций. Сумма площадей всех трапеций будет примерно равна одной четвертой части круга. В нашем примере площадь круга $S_{\text{кр}} \approx \pi$. Отсюда сумма площадей всех трапеций, умноженная на 4, будет примерно равна π :

$$(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots + S_{nk}) \cdot 4 \approx \pi.$$

Переведем рассмотренные алгоритмы определения числа π на Visual Basic For Application в Excel:

```

1 Public Sub Число_Pi()
2 Dim L1 As Double
3 Dim X1 As Double
4 Dim R As Double
5 Dim t As Double
6 Dim h1 As Double
7 Dim h2 As Double
8 Dim Y As Double
9 Dim S1 As Double
10 Dim ПИ3 As Double
11 Dim ПИ4 As Double
12 Dim k As Double
13 L1 = 0
14 S1 = 0
15 t = Val(InputBox("Введите высоту трапеции t
    от 0.1 до 0.000000001 для определения числа
    ПИ. Вычислите число ПИ3 через длины хорд
    и число ПИ4 через площади трапеций. Дробную
    часть отделяйте точкой. Каждое последующее
    значение t получается умножением предшеству-
    ющего на 0.1"))
16 R = 1
17 For X1 = 0 To R - t Step t
18 k = X1 + t
19 h1 = Sqr(R ^ 2 - X1 ^ 2)
20 h2 = Sqr(R ^ 2 - k ^ 2)
21 Y = h1 - h2
22 L1 = L1 + Sqr(Y ^ 2 + t ^ 2)
23 S1 = S1 + (h1 + h2) / 2 * t
24 Next X1
25 ПИ3 = L1 * 2
26 ПИ4 = S1 * 4
27 MsgBox "Разность t=" & t & Chr(13) _
28 & "Число ПИ3 (вычислено через длины хорд) ="
    & ПИ3 & Chr(13) _
29 & "Число ПИ4 (вычислено через площади
    трапеций) =" & ПИ4, vbYesNo,
    "Вычисление числа ПИ двумя методами"
30 Лист1.Cells(1, 1) = t
31 Лист1.Cells(1, 2) = ПИ3
32 Лист1.Cells(1, 3) = ПИ4
33 End Sub

```

Первая строка данной программы сообщает о ее видимости во всем проекте, уникальности имени программы. Со второй по двенадцатую строки вводятся переменные кода с их принадлежностью к действительным числам двойной точности. В тринадцатой строке хорде окружности из рисунка 3 присваивается значение, равное нулю. В четырнадцатой строке площади трапеции присваивается нулевое значение. В пятнадцатой строке через диалоговое окно пользователя вводится значение разности арифметической прогрессии — шаг изменения аргумента $X1$ в циклической программе, высота трапеции для каждого опыта от 0,1 до 0,000000001. При каждом последующем опыте значение t предыдущего опыта умножается на 0,1, т. е. переменная t вводится в соответствии с геометрической прогрессией. В шестнадцатой строке присваивается постоянное значение 1 радиусу круга. Семнадцатая строка — начало циклической программы — изменяет значение переменной $X1$ от 0 до значения последнего аргумента — значения последнего члена арифметической прогрессии $R - t$. Каждый цикл переменная $X1$ будет увеличиваться на шаг (*Step*), равный t , где t — высота трапеции, т. е. разность арифметической прогрессии. В восемнадцатой строке значение $X1$ увеличивается на величину t , чтобы в одном цикле возможно было вычислить сразу два основания трапеции для вычисления длины хорды круга и площади трапеции. В девятнадцатой строке определяется величина большего основания трапеции в данном цикле. В двадцатой строке вычисляется длина малого основания трапеции этого цикла. В двадцать первой строке находится величина катета AC треугольника ABC в этом цикле. В двадцать второй строке вычисляется длина хорды круга данного цикла и складывается с суммой длин предшествующих хорд. В двадцать третьей строке определяется величина площади трапеции в этом цикле и ее значение прибавляется к сумме площадей предшествующих трапеций. Двадцать четвертая строка заканчивает данный цикл и передает управление в начало следующего цикла для вычисления со следующим значением переменной $X1$. Так будет продолжаться до конечного значения $X1 = R - t$. После выполнения всех циклов управление перейдет на двадцать пятую строку, где вычисляется значение π_3 через длины хорд. Двадцать шестая строка определяет значение числа π_4 через площади трапеций. В строках 27–29 с помощью сообщающегося окна *MsgBox* пользователю выводятся значения вводимой высоты трапеции t , величины при данном t чисел π_3 и π_4 . Строки 30–33 помещают результаты программы, данные выше, на первый лист, первую строку, в первый, второй, третий столбцы программы Excel. Тридцать четвертая строка — конец программы.

Для запуска данной программы в Excel нажмите клавишу F5, когда курсор мыши находится внутри кода программы, и в диалоговом режиме определяйте значение числа π с помощью длин окружностей, площадей кругов. Код программы можно вызвать из меню: *Разработчик, Visual Basic For Application*, появится окно с кодом. Если окно с кодом не появилось, выберите *View, Project Explorer, Module1*. Результаты работы программы представлены в таблице 2.

Таблица 2

Высота прямоугольной трапеции — разность арифметической прогрессии	Число π_3 — вычислено через длины хорд окружности	Число π_4 — вычислено через площади трапеций	Число π в программах MS Office и в школьных учебниках
0,1	3,13226458946879	3,10451832922855	3,14159265358979
0,01	2,85845585468561	3,13759568458311	
0,001	3,05214063725004	3,14146604655540	
0,0001	3,14159149329493	3,14159147769823	
0,00001	3,14158872895553	3,14159261644536	
0,000001	3,13876423736333	3,14159264957389	
0,0000001	3,14154794772356	3,14159265415268	
0,00000001	3,14134429420222	3,14159264826133	
0,000000001	3,14153199118268	3,14159266368060	

Из таблицы 2 видно, что максимальное совпадение цифр чисел π , π_4 достигается при высоте прямоугольной трапеции, равной $10^{-7} = 0,0000001$:

$$\pi_3 = 3,14154794772356;$$

$$\pi_4 = 3,14159265415268;$$

$$\pi = 3,14159265358979.$$

Число π_3 , вычисленное через длины хорд окружности, в этом случае значительно отличается от числа π из школьных учебников и программ MS Office. Только пять цифр числа π_3 совпадают с цифрами числа π_4 , полученного алгоритмом определения площади круга трапециями, — это цифры 3,1415. Такой результат дает основание предполагать, что число π_3 для вычисления длин окружностей (одномерных фигур) отличается от числа π_4 , применяемого при определении площадей кругов (двумерных фигур). Здесь напрашивается аналогия связи коэффициента подобия у фигур, определяемых одномерными измерениями, с коэффициентом подобия двумерных фигур. Решение этой проблемы требует более мощных компьютеров, разработки лучших, более точных алгоритмов, творческого подхода к решению со стороны будущих исследователей.

Число π_4 , полученное через площади трапеций при высоте трапеции, равной $10^{-7} = 0,0000001$, совпадает с числом π в программах пакета MS Office и в школьных учебниках девятью первыми цифрами: 3,14159265. Можно сказать, что при определении площадей кругов число π с первыми девятью значащими цифрами будет давать достаточно точные результаты. О точности таких результатов говорит наше вычисление значения числа π с помощью площадей кругов, полученное другими методами — методом Монте-Карло, методом Джеймса Грегори, методом Лейбница — и сравнение его со значением числа π из программ MS Office. Несовпадение других цифр числа π_4 с цифрами числа π программ MS Office требует глубокого анализа точности его получения другими методами, нашим методом, а также точности работы компьютеров.

Число π_3 , полученное через длины хорд окружности при высоте трапеции 10^{-7} , в этом случае значительно отличается от числа π_4 , полученного через площади трапеций. Первые пять цифр числа $\pi = 3,1415$ для вычисления длины окружности можно использовать с достаточной точностью. Остальные цифры числа π программ MS Office при определении длины окружностей использовать не рекомендуется, как показал приведенный выше опыт.

Расхождение значения чисел π для определения длины окружности и вычисления площади круга в этом случае после пяти знаков можно частично доказать с помощью математического анализа. При определении длины окружности и площади круга используются предельные переходы, где допускаются округления.

Рассмотрим функцию вычисления площади круга:

$$S(R) = \pi R^2.$$

Производная этой функции равна длине окружности:

$$S'(R) = (\pi R^2)' = 2\pi R.$$

Производная функции вычисляется с помощью предельного перехода:

$$\begin{aligned} S'(R) &= \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2}{\Delta R} = \\ &= \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\pi R^2 + 2\pi R \Delta R + \pi \Delta R^2 - \pi R^2}{\Delta R} = 2\pi R + \pi \Delta R. \end{aligned}$$

В этом предельном переходе при определении значения производной функции не учитывается величина $\pi \Delta R$, так как ΔR стремится к нулю и принято считать, что $S'(R) = (\pi R^2)' = 2\pi R$. Это приближение предельного перехода, конечно, отражается на значении площади круга и длины окружности, а также на значении числа π для площади круга и длины окружности.

Программу определения числа π через длину окружности, которая находится длинами ее хорд, и через площадь круга, определяемую методом трапеций, можно написать не только в VBA для Excel, но и в VBA для Word 2010.

Анализ результатов вычисления числа π и его значение в развитии мышления учащихся

Рассмотренные способы нахождения числа π опытным, практическим путем развивают у учащихся стремление к познанию, творчеству, совершенствуют креативное мышление. Эти методы дают дополнительные способы поиска числа π , значение точности его вычисления и один из способов проверки точности и скорости работы компьютера, алгоритма, программы. Процесс познания законов количественных отношений требует постоянного совершенствования, их анализа, поиска прогрессивных алгоритмов и экономически выгодных методов использования на практике. Применение таких алгоритмов, программ развивает интерес к программированию, изучению информатики, математики, так как по сложности их изучения эти алгоритмы являются доступными, интересными и практичными. Учащийся сразу видит возможность их применения в практической и научной работе, неограниченность совершенствования и познания количественных отношений в окружающем нас мире.

Проанализируем конкретные результаты четырех приведенных выше способов вычисления числа π , когда величина числа π из наших опытов близка к его значению в школьных учебниках. Обобщим эти данные в таблице 3.

Из таблицы 3 видно, что при разности арифметической прогрессии или величины шага изменения аргумента $x_n - x_{n-1} = 10^{-9} = 0,000000001$ числа π , полученные методами 1, 2 и 4, равны до девятого знака:

$$\pi_1 = 3,14159266568015,$$

$$\pi_2 = 3,14159266168027,$$

$$\pi_4 = 3,1415926636806,$$

$$\pi = 3,14159265358979.$$

Самым близким к числу π по величине значением из значений, полученных тремя методами, является число π_4 , полученное с помощью измерения площадей трапеций. Этот метод будем считать наиболее точным. При измерении площади круга всеми указанными тремя методами использовалась теорема Пифагора, при которой вычисление величин производилось извлечением квадратных корней из иррациональных

чисел, поэтому получались числа неточные (так как компьютер вычисляет с определенной точностью), отсюда $\pi_4 \approx \pi$. Для более точного определения величины числа π методом трапеций необходимо использовать более совершенный компьютер.

Из таблицы 3 видно, что π_3 , определенное через вычисление длин хорд, значительно отличается от значений π_4 и π при $x_n - x_{n-1} = 10^{-9}$. Значение числа π_3 совпадает со значением чисел π_4 и π только до пяти знаков:

$$\pi_3 = 3,14153199118268,$$

$$\pi_4 = 3,1415926636806,$$

$$\pi = 3,14159265358979.$$

Величина числа π_3 в этом случае значительно меньше чисел π_4 и π :

$$\pi_3 < \pi < \pi_4,$$

$$\pi - \pi_3 \approx (3,14159265358979 - 3,14153199118268) \approx 0,00006066240711.$$

Такая разница чисел π и π_3 может говорить исследователям о том, что числа π для определения длины окружности и площади круга разные.

Их разница объясняется несколькими причинами. Одна из них — получение формулы площади круга $S = \pi R^2$. Площадь круга, определяемая данной формулой, несколько завышена, поэтому и $\pi_3 < \pi < \pi_2 < \pi_4 < \pi_1$.

Рассмотрим метод получения площади круга путем интегрирования (рис. 4).

На рисунке 4 круг разделен на концентрические окружности, для определения площади круга производится суммирование площадей колец круга. Площадь бесконечно тонкого «слоя» радиуса t будет равна $2 \cdot \pi \cdot t \cdot dt$, т. е. произведению длины окружности на толщину слоя. В результате получается элементарный интеграл для круга радиуса r . В этом условии допускается, что при малой величине «слоя», равной dt , площадь кольца равна площади прямоугольника с длиной $2\pi t$ и шириной $dt = (t - t_1)$ при $t_1 \rightarrow t$, т. е. длины концентрических окружностей одного кольца в этом круге равны, чего не может быть.

Этот допуск для получения интегральной суммы, конечно, на очень малое значение увеличивает

Таблица 3

Разность арифметической прогрессии, величина изменения аргумента $x_n - x_{n-1}$	Число π , определенное методом прямоугольников, когда их площадь содержит площадь круга, π_1 (метод 1)	Число π , определенное методом прямоугольников, когда их площадь находится в площади круга, π_2 (метод 2)	Число π , определенное методом измерения длин хорд окружности (вычисление с помощью длины окружности), π_3 (метод 3)	Число π , определенное методом вычисления площадей трапеций, когда их площадь содержится в площади круга, π_4 (метод 4)	Число π в школьных учебниках, π
0,000001	3,14159464674549	3,14159065240232	3,13876423736333	3,14159264957389	3,14159265358979
0,0000001	3,1415928541478	3,14159245415674	3,14154794772356	3,14159265415268	
0,00000001	3,14159266825513	3,1415926282601	3,14134429420222	3,14159264826133	
0,000000001	3,14159266568015	3,14159266168027	3,14153199118268	3,1415926636806	

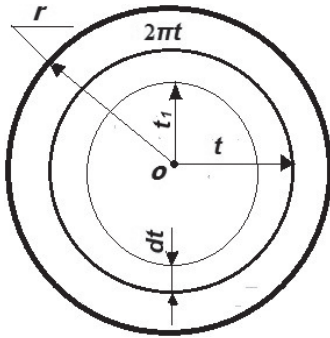


Рис. 4

площадь в формуле площади круга, что наглядно, интуитивно видно.

$$S(r) = \int_0^r 2\pi \cdot t \cdot dt = \left[2\pi \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^r = \pi \cdot r^2.$$

Это малое увеличение площади круга также можно доказать с помощью формул определения площади прямоугольника и формулы определения площади кольца. В интеграле предполагали, что площадь кольца:

$$S_{\text{кольца}} = 2\pi \cdot t \cdot dt = 2\pi \cdot t \cdot (t - t_1) \text{ при } t_1 \rightarrow t.$$

Более точно площадь кольца можно определить как разность площадей кругов с радиусами t и t_1 . Предварительно предполагаем, что площадь круга зависит только от радиуса круга и постоянного числа одинаковой величины для всех этих фигур — π . Принимаем, что площадь круга с радиусом t равна $S(t) = \pi t^2$. Площадь круга с радиусом t_1 равна $S(t_1) = \pi t_1^2$. Тогда площадь кольца будет равна:

$$S_{\text{кольца}} = S(t) - S(t_1) = \pi(t^2 - t_1^2).$$

Сравним величину площади кольца, принятой в интеграле, с площадью кольца, полученной в приведенной формуле, путем деления их величин:

$$\frac{2\pi \cdot t \cdot dt}{\pi(t^2 - t_1^2)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot t \cdot (t - t_1)}{\pi \cdot (t - t_1) \cdot (t + t_1)} = \frac{2t}{(t + t_1)} > 1 \text{ при } t_1 \rightarrow t,$$

что и требовалось доказать.

Из доказательства видно, что площади колец, вычисленные по формуле в интеграле и по формуле площади кольца $S_{\text{кольца}} = \pi(t^2 - t_1^2)$, будут равны только при равенстве радиусов t и t_1 . При равенстве радиусов t и t_1 кольцо перейдет в одномерное измерение, чего нельзя допускать, так как площадь имеет два измерения. Такие малые неточности данной формулы могут приводить к увеличению числа π в приведенных выше алгоритмах.

В школьных учебниках площадь круга обычно определяется методом разделения его на равные треугольники, у которых одна вершина лежит в центре круга, а противоположная сторона этой вершины является хордой окружности — границы круга (рис. 5).

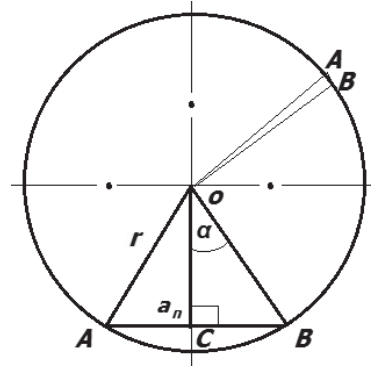


Рис. 5

Длину стороны AB такого треугольника уменьшают до величины, близкой к нулю. При такой величине стороны AB треугольника точка C высоты треугольника OC приближается к окружности и длина высоты OC приравнивается к длине радиуса r круга. Сумма длин сторон AB всех равных треугольников, стремящихся к нулю, достигает длины окружности $2\pi r$. При таких условиях длина стороны AB приравнивается к бесконечно малой величине dt , высота OC становится равной радиусу r и площадь каждого треугольника AOB определяется формулой:

$$S_{\Delta} = \frac{r \cdot dt}{2}.$$

Суммируя (интегрируя) все площади таких треугольников, получим формулу определения площади круга:

$$S(r) = \int_0^{2\pi r} \frac{1}{2} r \cdot dt = \left[\frac{1}{2} r \cdot t \right]_{t=0}^{2\pi r} = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

При этих условиях определения площади круга высота вписанного в него треугольника приравнивается к величине его радиуса, что на незначительную величину изменит круг в сторону его увеличения, так как тогда радиусы круга выйдут за его пределы и сторона AB будет касаться окружности. При полном вырождении треугольника в одномерную фигуру исчезнет понятие площади треугольника, он перейдет в одномерное измерение и будет описываться иными числами (см. рис. 5). По нашему мнению, школьное определение площади круга также незначительно увеличивает его величину, что явилось одной из причин незначительного несовпадения числа π с числами π_1, π_2, π_4 и π в таблице 3 результатов наших опытов.

Список использованных источников

1. Игнатьева А. В., Краснощекова Т. И., Смирнов В. Ф. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1964.
2. Каммингс С. VBA для чайников. М.: Диалектика, 2005.
3. Площадь круга // Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Площадь_круга
4. Погорелов А. В. Геометрия. Учебник для 7–11 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1998.