Г. Б. Камалова, Б. Г. Бостанов, К. У. Умбетбаев,

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО НАСЛЕДИЯ АЛЬ-ФАРАБИ

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы целесообразности внедрения в современное образование математических задач из наследия аль-Фараби и возможности использования программы GeoGebra.

Ключевые слова: математическое наследие аль-Фараби, компьютерные геометрические алгоритмы, геометрические построения в GeoGebra.

Среди богатейшего научного наследия аль-Фараби, одного из величайших ученых, мыслителей и энциклопедистов Раннего Средневековья, внесшего существенный вклад в развитие мировой науки, особое место занимают его труды в области естественно-математических наук. Преобладающая их часть изучена лишь сравнительно недавно, в основном известным казахстанским ученым в области истории математики и педагогики исламского Востока А. Кубесовым и отражена в его работах «Математическое наследие аль-Фараби», «Математические трактаты», «Комментарии к “Альмагесту” Птолемея», получивших высокую оценку зарубежных ученых-фарабистов [2, 3, 4, 7].

Особое место среди многочисленных математических трудов аль-Фараби занимает его «Книга духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур», единственная рукопись которой хранится в библиотеке Упсальского университета в Швеции [3]. В ней предлагаются уникальные алгоритмы решения огромного количества геометрических задач на построение с помощью циркуля и линейки, важных в практической деятельности человека: землемерии, архитектуре, технике, геодезии.

Геометрическим построениям посвящены работы и многих предшественников аль-Фараби. Значительное количество сочинений о них встречается у древних греков, но самая древняя книга, где специально рассматривались подобные задачи, — это сочинение индийских математиков VII—V веков до н. э., посвященное в основном правилам постройки алтарей.

Интерес в течение многих веков к задачам на построение обусловлен не только их красотой и оригинальностью методов решения, а, прежде всего, их большой практической ценностью. И в наши дни геометрические задачи на построение также вызывают немалый интерес, поскольку и сегодня проектирование в строительстве, архитектура, конструирование различной техники и многие другие задачи практики основаны на геометрических построениях. Огромна роль задач на построение и в математическом развитии учащихся. Составляя одну из содержательных линий школьного курса геометрии, они являются весьма существенным элементом в обучении геометрии, одной из ее неотъемлемых частей.

Контактная информация

Камалова Гульдина Большевиковна, доктор пед. наук, доцент кафедры информатики и информатизации образования Института математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан; *адрес:* 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Толе би, д. 86; *телефон:* (727) 272-30-73; *e-mail:* g_kamalova@mail.ru

Бостанов Бектас Ганиевич, канд. пед. наук, зам. зав. кафедрой информатики и информатизации образования Института математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан; *адрес:* 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Толе би, д. 86; *телефон:* (727) 272-30-73; *e-mail:* bbgu@mail.ru

Умбетбаев Кайрат Усенбаевич, магистр наук, ст. преподаватель кафедры информатики и информатизации образования Института математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан; *адрес:* 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Толе би, д. 86; *телефон:* (727) 272-30-73; *e-mail:* kairatuu@mail.ru

G. B. Kamalova, B. G. Bostanov, K. U. Umbetbayev,

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Kazakhstan, Almaty

ABOUT USING GEOGEBRA PROGRAM WHEN SOLVING PROBLEMS FROM THE MATHEMATICAL HERITAGE OF AL-FARABI

Abstract

The article considers the issues of expediency of introduction of mathematical problems from the heritage of al-Farabi in modern education and possibilities of using GeoGebra program.

Keywords: mathematical heritage of al-Farabi, computer geometric algorithms, geometric constructions in GeoGebra.

Эти задачи отличаются разнообразными приложениями в практической деятельности, богатыми межпредметными и внутрипредметными связями; тесно связаны практически со всеми разделами школьного курса геометрии, что позволяет использовать их как средство повторения, обобщения и систематизации изученного геометрического материала. По своей постановке и методам решения они не только наилучшим образом стимулируют накопление конкретных геометрических представлений, но и развивают способность отчетливо представлять себе ту или иную геометрическую фигуру и, более того, уметь мысленно оперировать элементами этой фигуры, способствуя развитию пространственного мышления школьников. Подобные задачи аккумулируют в себе обучение поисковой деятельности, формируют исследовательские навыки у учащихся. При их решении рассмотрение цепочки основных построений, приводящих к цели, как некоторого алгоритма позволяет использовать эти задачи в старших классах в качестве содержательного материала курса информатики. В процессе их решения учитель может эффективно формировать элементы алгоритмической культуры школьников, систематически требуя от них четкой последовательности основных построений.

Геометрические трактаты аль-Фараби включают значительный объем задачного материала и могут удовлетворить потребность в наличии достаточного количества специальных задач на построение, которые, с одной стороны, способствуют развитию познавательного интереса, исследовательских навыков учащихся, их логического и пространственного мышления, с другой стороны, направлены на формирование понятий и усвоение теорем планиметрии. Изучение этих задач позволит углубить знания учащихся, расширить их представления о задачах на построение и возможных способах их решения. Более того, использование таких задач и некоторых исторических сведений о них при изложении материала урока подчеркнет практическое его значение, поднимет интерес учащихся к изучаемому материалу и будет способствовать прочному его усвоению. Однако до сих пор практически нет исследований, посвященных вопросам обучения решению указанных задач. Поэтому рассмотрение возможности внедрения математического наследия аль-Фараби в современное информатико-математическое образование и обучения ему в свете современных требований информатизации образования представляется актуальным.

В работе аль-Фараби рассмотрены уникальные алгоритмы решения огромного количества геометрических задач на построение с помощью циркуля и линейки, даже для задач, для которых точное построение невозможно, — для них приводятся алгоритмы, позволяющие осуществить построение с незначительной погрешностью. Особый интерес вызывают задачи о построении трисекции угла и некоторых правильных многоугольников, вписанных в круг, неразрешимые с помощью циркуля и линейки.

Правильные многоугольники всегда привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов, конструкторов. Алгоритмы построения некоторых из них рассмотрены еще Евклидом, но большой вклад в решение задач построения подобных многоугольников внес немецкий математик К. Ф. Гаусс. Он указал все значения n, при которых возможно построение правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки: построить можно такие многоугольники, у которых количество сторон является простым числом вида $2^{2^k} + 1$, а также те, которые получаются из указанных удвоением числа сторон. А вот построение с помощью циркуля и линейки правильных 7-, 9-, 11-, 13-, 14-, 18-, 19-, 21-, 22-, 23-, 25-, 27-, 28-, ... -угольников (т. е. n-угольников, не удовлетворяющих указанным выше условиям) оказывается невозможным. И Евклидом они также не рассматривались. Но практическая необходимость в них возникает, поэтому в работе аль-Фараби приведены алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки и семи, и девятиугольников. Благодаря этим алгоритмам построение осуществляется достаточно просто, хотя и с некоторой несущественной погрешностью. Приближенность данных алгоритмов при необходимости может быть показана путем их обоснования даже на основе знаний из области школьной математики и с использованием современных вычислительных средств.

Все геометрические построения у аль-Фараби представлены в виде четкой последовательности действий, что существенно облегчает их компьютерную реализацию, позволяя повысить эффективность и качество обучения. Особый интерес при этом представляют специально предназначенные для применения в обучении геометрии интерактивные геометрические среды, позволяющие создавать качественные планиметрические и стереометрические чертежи. Наибольшей популярностью среди них пользуется программа GeoGebra. В ней можно осуществлять всевозможные построения, а затем динамически изменять их, строить анимации, можно напрямую вводить уравнения и манипулировать координатами. Обладая огромными возможностями, GeoGebra позволяет выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными. В программе имеется возможность интерактивного сочетания геометрического, алгебраического и числового представления. Созданный в ней анимированный файл можно использовать как в самой среде, так и во многих других средах в виде видеофайла, анимированного gif-файла, вебстраницы и т. д.

Использование среды GeoGebra при обучении геометрическим задачам на построение из математического наследия аль-Фараби облегчает не только само построение, но и понимание правильности такого построения и его обоснование.

Рассмотрим некоторые из задач аль-Фараби и их решение в программе GeoGebra.

Серия задач в работе аль-Фараби посвящена элементарным построениям с помощью циркуля и линейки. В их числе построение равносторонних фигур, построение некоторых фигур, вписанных в другие, и т. д.

В задаче «О построении правильного треугольника» аль-Фараби пишет: чтобы «построить

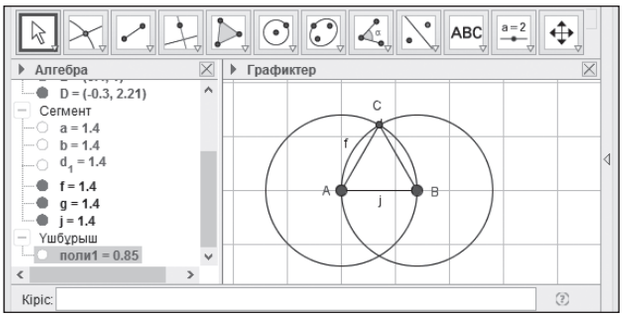

Рис. 1. Построение равностороннего треугольника по алгоритму аль-Фараби

на линии AB равносторонний треугольник, из точек A и B как из центров опишем на расстоянии AB круги. Они пересекутся в точке C. Соединим точку C с точками A и B прямыми линиями CA и CB. Получится равносторонний треугольник ABC» [3]. В тексте четко представлена цепочка необходимых действий. Последовательно выполняя их с использованием инструментов среды GeoGebra, можно построить треугольник с заданной стороной, который будет равносторонним (рис. 1).

Обоснование правильности такого построения, благодаря наглядному изображению, достаточно очевидно, и учащиеся могут сделать это самостоятельно.

В задаче о построении равностороннего треугольника, вписанного в равносторонний четырехугольник, аль-Фараби предлагает следующий алгоритм: «Построим квадрат $ABCD$, продолжим линию DC до точки E и сделаем CE равной CD. Построим на линии ED полукруг, примем точку D за центр окружности и на расстоянии CD отметим точку G. Далее примем точку E за центр окружности и на расстоянии EG отметим точку H, построим AF, равную DH, соединим B с F, B с H, F с H. Получим

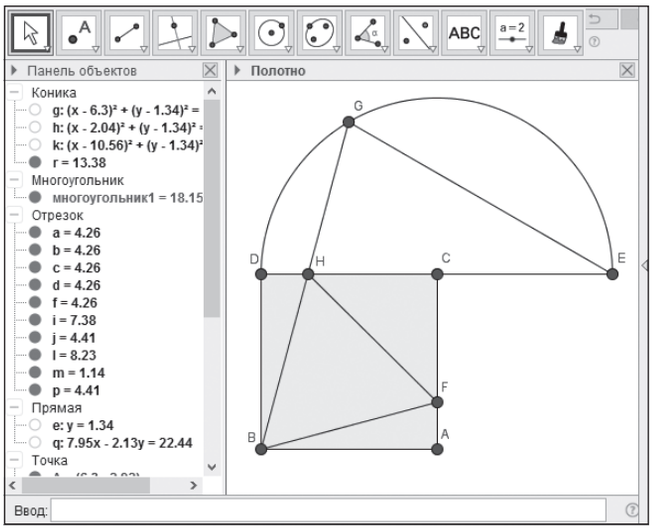

Рис. 2. Построение равностороннего треугольника, вписанного в квадрат, по алгоритму аль-Фараби

равносторонний треугольник BFH, вписанный в квадрат $ABCD$» [3] (рис. 2).

Правильность данного построения также несложно обосновать, но это требует некоторых сведений из курса геометрии, что позволит учащимся закрепить полученные ранее знания.

Интересной представляется и задача построения правильного девятиугольника, которая относится к категории задач на построения, неразрешимых с помощью циркуля и линейки. В основе алгоритма ее решения, предложенного аль-Фараби [3], лежит **задача о делении угла на три равные части**, которая также неразрешима, что в общем случае показано в работе [5, с. 164]. Аль-Фараби же в своих трактатах приводит два способа решения этой задачи. Разумеется, эти способы — приближенные с некоторой незначительной погрешностью, но в ра-

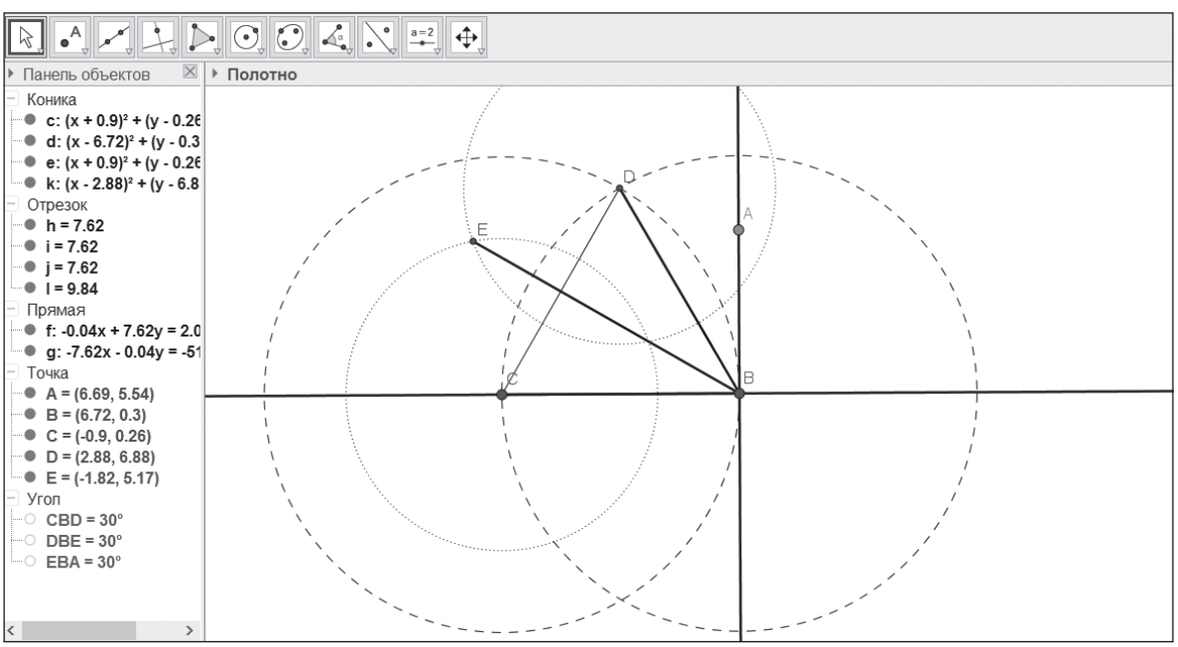

Рис. 3. Построение трисекции прямого угла по алгоритму аль-Фараби

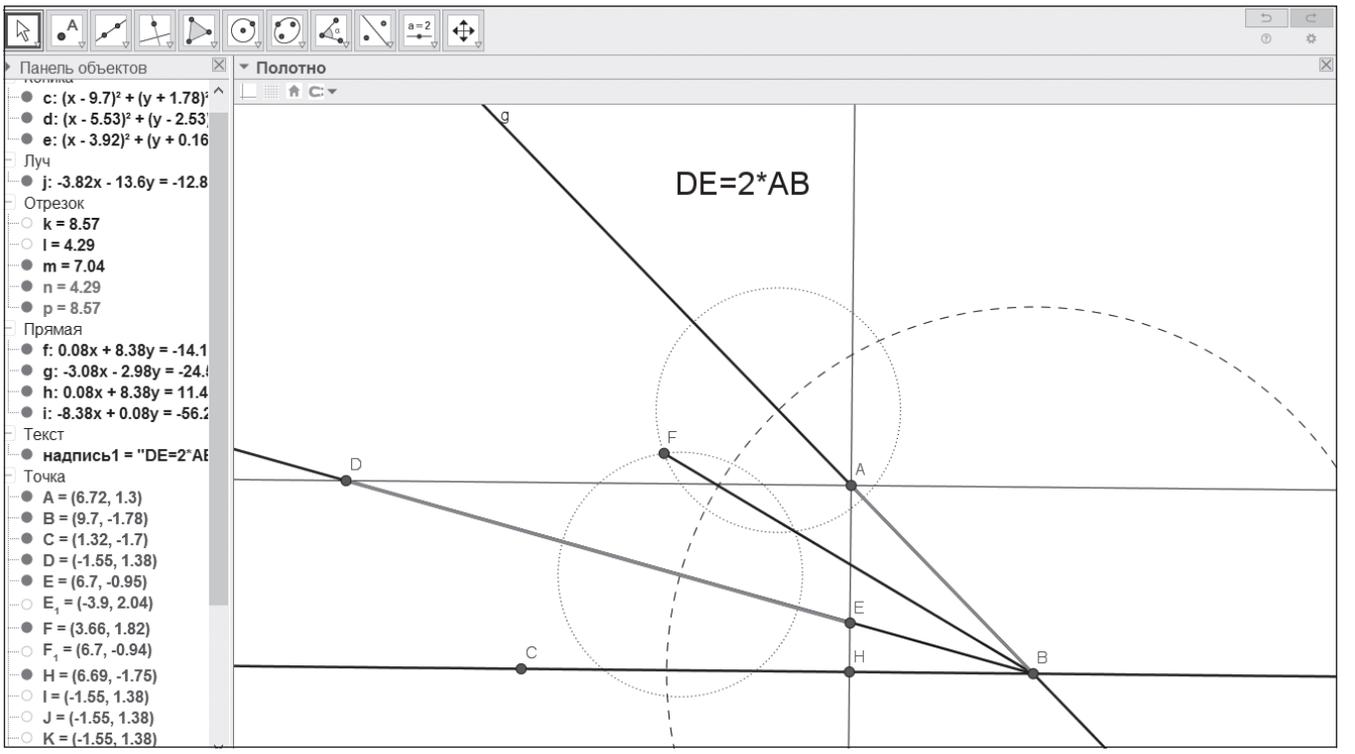

Рис. 4. Построение трисекции острого угла по алгоритму аль-Фараби

боте он не отмечает приближенного характера своих построений.

Один из этих алгоритмов описан аль-Фараби следующим образом: «Как разделить угол *ABC* на три равные части? Если угол прямой, построим на линии *BC* равносторонний треугольник *DBC*. Тогда угол *ABD* — треть прямого угла. Разделим угол *DBC* пополам. Вот рисунок этого (рис. 3)» [3].

Если угол меньше прямого угла, то «построим острый угол — угол *ABC* и, если мы хотим разделить его на три равные части, опустим из точки *A* перпендикуляр *AH* на линию *BC* и проведем из точки *A* линию *AD* параллельно *BC*. Приложим линейку к точке *B* и будем двигать ее по линиям *AD* и *AH* до тех пор, пока линия, которая находится между линиями *AD* и *AH*, не станет равной удвоенной линии *AB*. Это, например, линия *DEB*, так что линия *DE* — удвоенная линия *AB*. Тогда угол *DBC* — треть угла *ABC*. Вот рисунок этого (рис. 4)» [3].

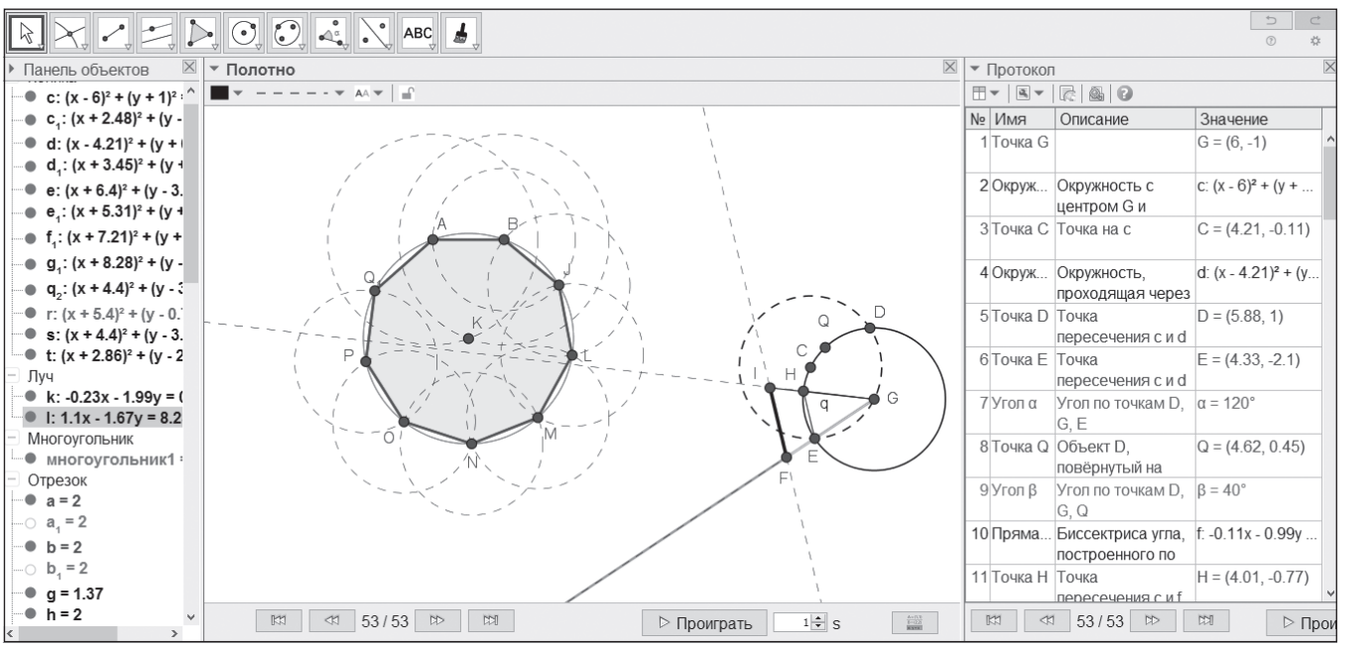

Рис. 5. Построение девятиугольника по алгоритму аль-Фараби

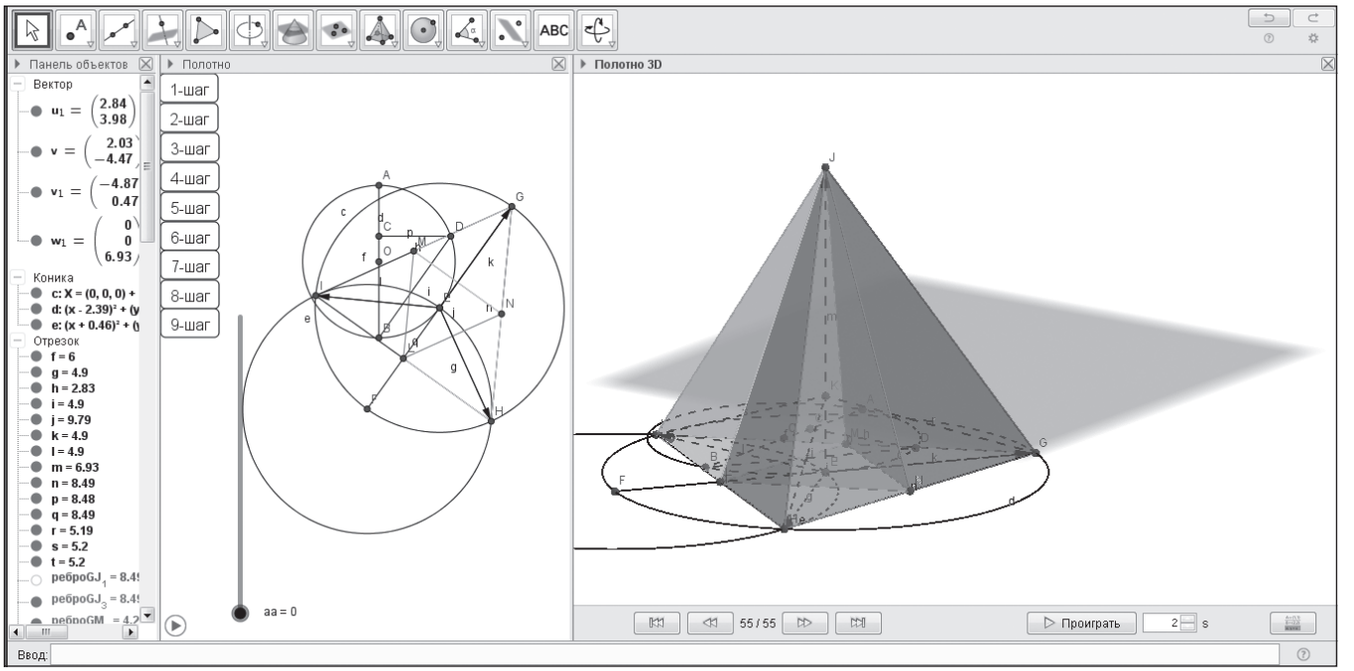

Рис. 6. Разделение сферы на четыре равные части по алгоритму аль-Фараби

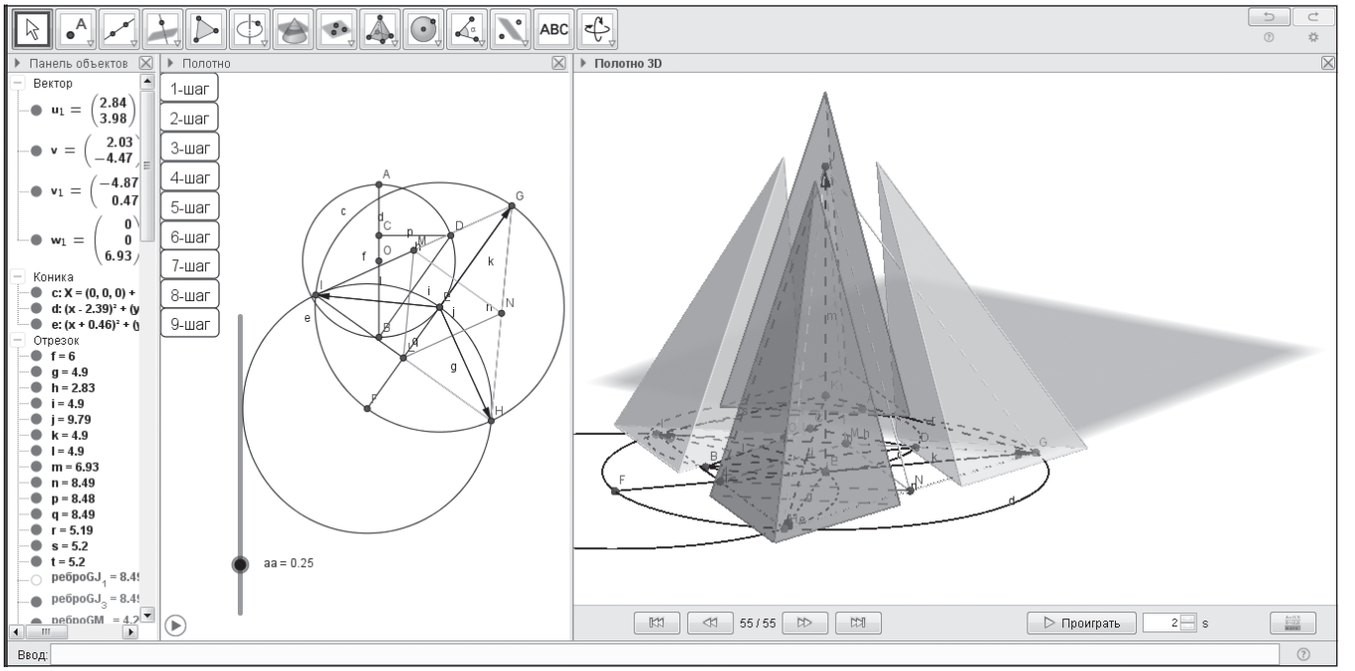

Рис. 7. Анимирование частей сферы, разделенной по алгоритму аль-Фараби

Алгоритм построения правильного девятиугольника, основанный на построении трисекции угла, аль-Фараби описывает так: «Если он сказал: как построить на линии *AB* равносторонний и равноугольный девятиугольник, то опишем круг произвольного размера с центром в точке *G*, отметим на нем точку *C*, примем ее за центр и на расстоянии полудиаметра круга отметим [точки] *E* и *D*. Разделим дугу *DE* на три равные части (рис. 5). Пусть одна такая дуга — *EH*. Проведем линии *EG*, *EH* и *HG*. Проведем между линиями *EG* и *HG* линию *FI*, равную линии *AB* и параллельную линии *EH*. Примем точки *A* и *B* за центры и на расстоянии *FG* опишем круги, которые пересекутся в точке *K*. Примем точку *K* за центр и на расстоянии *KA* [опишем] круг *ABL*. Разделим дугу *ALB* на восемь равных частей и соединим эти точки деления хордами. Получится равносторонний и равноугольный девятиугольник на линии *AB*» [3].

Данный алгоритм, впрочем, как и все другие алгоритмы ученого, включая построение трисекции угла, несложно реализовать в среде GeoGebra (рис. 5).

Полученный в результате построений по описанному алгоритму компьютерный чертеж в среде GeoGebra выглядит аккуратно и математически точ-

но. Не менее важно и то, что его можно сохранить и видоизменять, элементы чертежа легко измерить, выделить палитрой цвета, сопроводить надписями. От учащихся требуется осуществление не только соответствующих построений в данной программной среде, но и обоснование алгоритма с опорой на современные знания в области школьной геометрии.

Построение девятиугольника по алгоритму аль-Фараби, как было отмечено выше, является приближенным и допускает некоторую достаточно малую погрешность, которую на чертеже заметить очень сложно, но желательно ее обосновать.

Подобные задания увлекают школьников. Они позволяют не только углубить знания учащихся по программе, но и способствуют развитию их мышления, учебно-познавательных, информационных и других ключевых компетентностей.

Большой интерес у учащихся вызывают и представленные в трактатах задачи на построение в пространстве. В их числе задачи по разделению сферы на некоторое число сферических многоугольников.

Одной из таких задач является **задача разделения сферы на четыре равные части, являющиеся правильными сферическими треугольниками**. Аль-Фараби предлагает следующий способ ее решения: «Как разделить сферу на четыре равных треугольника с равными сторонами и углами, если известен диаметр сферы? Если диаметр сферы равен линии AB, построим на линии AB полукруг, отложим линию AC, равную трети AB, проведем линию CD перпендикулярно к линии AB; она встретит полукруг ADB в точке D. Возьмем на круге произвольную точку E, примем ее за полюс и на расстоянии BD опишем круг FGH, разделим его на три равные части в точках G, H, F и проведем через полюс и через каждую точку G, H и F дуги большого круга, пересекающиеся в точке J, а через каждые две из точек G, H и F — дугу большого круга. Тогда получим сферу, разделенную на четыре равносторонних и равноугольных треугольника. Это треугольники JHF, JHG, FJG и GHF» [3] (рис. 6, 7).

Использование среды GeoGebra при реализации данного алгоритма значительно упрощает построение, предоставляет возможность более наглядного оформления и динамического манипулирования частями чертежа для лучшего понимания как алгоритма, так и полученных результатов, способствует вовлечению учащихся в активную познавательную деятельность путем выдвижения различных гипотез и поиска ответов.

Подобных задач на построение, описанных аль-Фараби в трактатах, существует очень много. Наряду со всеми необходимыми для обучения материалами они размещены на специально разработанном научно-образовательном портале [1, 6]. Знакомство с ними позволит расширить и обогатить систему предметных знаний учащихся, повысит прочность этих знаний за счет анализа и повторения учебного материала в новом, историческом контексте, интересном и эмоционально насыщенном для восприятия учащимися. Исторический контекст учебного материала значительно усилит доказательность и убедительность важности полученных результатов и, несомненно, будет способствовать развитию познавательных интересов учащихся, навыков построения фигур, исследовательских навыков, повышению уровня графической культуры школьников.

В заключение хотелось бы отметить, что внедрение в систему современного образования математического наследия аль-Фараби окажет значительное влияние на качество предметной подготовки учащихся в ее обучающем, развивающем и воспитательном аспектах. Будет способствовать формированию и развитию научного мировоззрения, чувства патриотизма и интернационализма, а также других социально ценных мотивов учения за счет осознания общественной значимости богатого математического наследия великого ученого. Полученные при этом знания станут более осознанными и прочными. А использование современных интерактивных геометрических сред будет способствовать повышению интереса учащихся, увлеченности предметом, а также активизировать их поисково-познавательную деятельность.

Список использованных источников

1. *Бидайбеков Е. Ы., Гриншкун В. В., Бостанов Б. Г., Умбетбаев К. У.* О разработке и использовании образовательного портала по геометрическому наследию аль-Фараби в качестве средства информатизации обучения истории математики // Вестник МГПУ. 2015. № 4 (34).

2. Комментарии к «Альмагесту» Птолемея / пер. с араб. А. Кубесова и Дж. аль-Даббаха. Алма-Ата: Наука, 1975.

3. *Кубесов А. К.* Аль-Фараби. Математические трактаты. Алма-Ата: Наука,1972.

4. *Кубесов А. К.* Математическое наследие аль-Фараби. Алма-Ата: Наука,1974.

5. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? (Элементарный очерк идей и методов): 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦМНО, 2001.

6. Научно-образовательный портал Математическое наследие аль-Фараби. http://al-farabi.kaznpu.kz

7. *Carry J. Tee (University of Aucland), Kubesov A. K.* The Mathematical Heritage of al-Farabi (in Russian) // Journal for the history of Arabic science. 1978. No. 1.